RIME
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

ISSN 2810-7187
Nº2
volumen 1 - 2024

DOI: https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023784

# NARRATIVA DE PROFESORES UNIVERSITARIOS SOBRE EL CONCEPTO ECUACIÓN LOGÍSTICA: ANÁLISIS TEÓRICO EN APOE

## NARRATIVE OF UNIVERSITY TEACHERS ABOUT THE CONCEPT LOGISTIC EQUATION: THEORETICAL ANALYSIS IN THE APOE

## NARRATIVA DE PROFESSORES UNIVERSITÁRIOS SOBRE O CONCEITO DE EQUAÇÃO LOGÍSTICA: ANÁLISE TEÓRICA NA APOE

**Ingrid Quilantán Ortega[1] • Flor Monserrat Rodríguez Vásquez[2]**

Recibido: Abr/13/2024 • Aceptado: Oct/25/2024 • Publicado: Dic/01/2024

## RESUMEN

En este trabajo se presentan los relatos de cuatro docentes de nivel universitario acerca de la enseñanza-aprendizaje de la Ecuación Logística y su importancia en la educación matemática desde su praxis docente. Los datos se recolectaron mediante una entrevista no estructurada y para su análisis se utilizó la narrativa. Estas narrativas nos indicaron una trayectoria a seguir para crear una descomposición genética preliminar de la Ecuación Logística de acuerdo con una de las perspectivas del primer componente, análisis teórico, de APOE: una mirada desde la didáctica de la matemática.

*Palabras clave:* ecuación logística; narrativa; profesores universitarios; teoría APOE.

## ABSTRACT

This paper presents the stories of four university-level professors about the teaching-learning of the Logistic Equation and its importance in mathematics

[1] Universidad Autónoma de Guerrero, México; Facultad de Matemáticas; 21254443@uagro.mx; https://orcid.org/0009-0005-6198-065X

[2] Universidad Autónoma de Guerrero, México; Facultad de Matemáticas; flor.rodriguez@uagro.mx; https://orcid.org/0000-0002-9596-4253

education from their teaching perspective. The data was collected through an unstructured interview and narrative was used for analysis. These narratives indicated a path to follow to create a preliminary genetic diagnosis of the Logistics Equation according to one of the perspectives of the first component, theoretical analysis, of APOS: a view from the didactics of mathematics.

*Keywords:* logistic equation; narrative; university teachers; APOS theory.

## RESUMO

Este trabalho apresenta as histórias de quatro professores de nível universitário sobre o ensino-aprendizagem da Equação Logística e sua importância na Educação Matemática a partir de sua práxis docente. Os dados foram coletados por meio de entrevista não estruturada e a narrativa foi utilizada para análise. Essas narrativas indicaram um caminho a seguir para criar uma decomposição genética preliminar da Equação Logística de acordo com uma das perspectivas do primeiro componente, a análise teórica, da APOE: um olhar a partir da didática da matemática.

*Palavras-chave:* equação logística; narrativa; professores universitários; teo- ria APOE.

## INTRODUCCIÓN

La ecuación logística, es una ecuación diferencial ordinaria creada por Pierre F. Verhulst para modelar matemáticamente el crecimiento de la pobla- ción humana. Debido a su utilidad para resolver problemas en diferentes áreas como Biología, Economía, Medicina, Química, Física, entre otras, la ecuación logística aparece en diversos programas de estudios universitarios relaciona- dos con ciencia y tecnología, por lo que es estudiada por universitarios en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales con el objetivo de modelar fenómenos no solo de crecimiento de poblaciones [1-5], sino también de propagación de enfermedades [6-9], movimiento vehicular, difusión en redes sociales y difu- sión de tecnología [8].

Sin embargo, se observan dificultades al resolver problemas que la invo- lucran y al encontrar su solución como ecuación diferencial ordinaria [10]; por ejemplo, al notar que la solución de la ecuación diferencial es una función y no un valor numérico como usualmente se enseña en niveles educativos previos al resolver ecuaciones [11]. También, existen dificultades en su interpretación, por ejemplo, para realizar una conexión entre los contextos de la vida real y su representación matemática [12]. Al respecto, Rodríguez y Ulloa [13] mencionan que tales dificultades se deben, en parte, a que en el aula se ejemplifican problemas matemáticos bajo situaciones imaginarias o abstrac- tas, dejando de lado lo concreto y el contexto social del estudiantado. En la actualidad, derivado de la pandemia por el COVID-19, se han analizado as- pectos específicos de la ecuación logística con un fin didáctico, por ejemplo, el estudio de los parámetros involucrados, su crecimiento acotado, la aproxi- mación exponencial, su gráfica y su interpretación [1, 6] y [14-16].

No obstante, se reconoce que se debe documentar con mayor rigor lo relativo a la ecuación logística en educación matemática para permitir la crí- tica ordenada, precisa y analítica en torno a dicho tema.

Por otra parte, la Teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema), es una teoría constructivista que se encarga de entender cómo se pueden apren- der los conceptos matemáticos, está basada en el principio de abstracción re- flexiva de Piaget, y fue introducida por Dubinsky en 1980, cuya idea central es describir lo que puede estar pasando por la mente de una persona cuando está tratando de aprender un concepto matemático, es decir, especificar las construcciones necesarias que se realizan de forma mental para lograr el aprendizaje de dicho concepto. Para conocer y validar las estructuras y mecanismos mentales, la teoría propone trazar un camino hipotético de aprendizaje -descomposición genética- que se fundamenta en un análisis teórico del concepto, el cual puede realizarse por medio de una revisión del desarrollo histó- rico del concepto, o desde su formalización, e incluso desde las experiencias de los docentes desde un enfoque didáctico acerca del concepto a aprender [17].

Centrados en la praxis de los docentes, el objetivo de este escrito es mostrar a la narrativa como método para el análisis teórico en APOE acerca del concepto ecuación logística.

## MARCO TEÓRICO

La descomposición genética es el elemento central de la teoría APOE. Una descomposición genética es un modelo hipotético (es decir, un modelo fundamentado en una suposición) que describe las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante puede necesitar para construir su aprendizaje respecto de un concepto matemático específico. Usualmente se empieza con una hipótesis basada en las experiencias de los investigadores acerca de la ense- ñanza y el aprendizaje del concepto, su conocimiento en matemáticas y el desarrollo histórico del concepto. Hasta que esta sea experimentada, una des- composición genética es una hipótesis y se conoce como descomposición ge- nética preliminar. La descomposición genética consiste en una descripción de las Acciones que un estudiante necesita realizar en los Objetos mentales exis- tentes y continúa incluyendo explicaciones de cómo estas Acciones se interio- rizan en Procesos.

## METODOLOGÍA

La investigación fue cualitativa y se usó la narrativa como el método de investigación, ya que permite interpretar y construir fenómenos sociales por medio del relato, en torno al objeto investigado [18]. La investigación narra- tiva tiene una dimensión temporal, inmerso en un diálogo interactivo con los participantes, la narrativa permite que se dé sentido a acontecimientos y ex- periencias mediante un conjunto de conversaciones. Para recolectar los datos se aplicó una entrevista no estructurada. Dicha entrevista estuvo encaminada a indagar cómo los profesores, desde su praxis docente, enseñan la ecuación logística y cuál es su importancia en educación matemática. Los participantes fueron cuatro profesores universitarios especialistas en el área de matemáticas aplicadas, quienes han impartido el curso de ecuaciones diferenciales en algún momento de su práctica docente.

## RESULTADOS

A continuación, se presentan las narrativas de los profesores participan- tes respecto de la enseñanza y aprendizaje de la ecuación logística. Es perti- nente mencionar que la mirada de los profesores que la enseñan en el aula es de gran utilidad para el primer componente del ciclo de investigación en APOE, debido a que son ellos quienes están directamente relacionados con los estudiantes.

**Tabla 1.** *Narrativa Profesor A*

| Características del profesor | Narrativa |
|---|---|
| Profesor Investi- gador del Depar- | Profesor A: 1. El caso continuo $\frac{dx}{dt} = rx\left(\frac{K-x}{K}\right) - - - - - (1)$ |

| | |
|---|---|
| tamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México. Área de interés: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Parciales, Modelación Matemática, Biología Matemática. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores nivel 1. | Fue propuesto por el demógrafo belga Pearl Verhulst con la intención de tener un modelo que tomara en cuenta el hecho de que los recursos del medio no son ilimitados (cosa que no contempla el modelo de Malthus), una medida de ellos la capacidad de carga $K$.<br>El estudio del modelo (1) es importante desde mi punto de vista, al menos por las siguientes razones:<br>a) Cada uno de sus términos y parámetros tienen una interpretación ecológica transparente.<br>b) Es el primer modelo matemático no trivial que, siendo no lineal, exhibe comportamientos dinámicos que se pueden caracterizar por métodos elementales: un repulsor ($x^* = 0$) y un atractor ($x^* = K$) cuya interpretación demográfica es importante.<br>c) A partir del signo de la derivada en (1) se puede dar el comportamiento cualitativo de sus soluciones correspondientes a distintas condiciones iniciales.<br>d) A pesar de no ser lineal, la solución de un problema de condiciones iniciales asociado a (1) se puede obtener también por métodos elementales. Aquí hay dos opciones: separar variables e integrar (fracciones parciales) o bien transformarla mediante un cambio de variable, en una ecuación tipo Malthus. El método de malthusianización dado en [19], es exitosamente aplicable aquí.<br>e) Si una persona tiene una tabla de datos (de campo o de laboratorio) en la que registre valores de $x$ a distintos tiempos y tiene razones para pensar que estos siguen la tendencia de una sigmoidea como lo tiene la solución de (1), se puede, a partir de los datos, determinar los parámetros $(r, K, x_0)$ que la caracterizan.<br>f) El modelo de Verhulst, fue propuesto siguiendo una línea histórica que vale mucho la pena seguir: se trataba de proponer un modelo demográfico que superara las deficiencias del modelo de Malthus.<br>2. El caso discreto $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ − − − − − − − − − − (2)<br>Me parece que este modelo (aunque no es el único) rompe el paradigma: determinismo implica predictibilidad pues, para el rango $(3,4]$ de valores para $r$, exhibe comportamiento caótico a través de la ruta de "doblamiento de periodo". |

Fuente: elaborada por las autoras

El profesor A, distingue entre los casos continuo y discreto de la ecuación logística, por lo que se considera que esta distinción es de relevancia. Se observa, de la narrativa, que este profesor da una concreta y concisa explicación acerca del comportamiento caótico que se puede hallar en la ecuación logís- tica discreta cuando se varía un parámetro. Sin embargo, en el caso continuo, realiza una explicación detallada. Se podría pensar que esto es debido al área de interés del profesor A. Al explicar el caso continuo, comienza por decir que el modelo de Verhulst (modelo logístico) surgió para mejorar el modelo de Malthus (modelo exponencial), por lo que podríamos inferir que tener en cuenta las características del modelo de Malthus y conocer su dinámica podría incidir de manera significativa en la comprensión del modelo de Verhulst. En los incisos a), b), c), y d), el profesor expone puntualmente la importancia del modelo respecto a sus características, cada una de ellas se considera relevante en la construcción de la descomposición genética preliminar. A saber: des- cribir cada término de la ecuación y los parámetros involucrados de manera matemática y con interpretación ecológica clara; dar la definición matemática de una ecuación no lineal y decir porqué la ecuación logística lo es; determi- nar los puntos de equilibrio y clasificarlos en repulsor, atractor, indiferente, según sea el caso; analizar las soluciones de la ecuación de manera cualitativa con base al signo de la derivada; utilizar distintas condiciones iniciales y de- terminar la solución que pasa por estas; describir el método de separación de variables y el método de malthusianización.

Del inciso e) observamos que el profesor narra que a partir de datos conocidos (y si se piensa que estos datos podrían seguir una forma sigmoidea), se podría construir un modelo logístico que se ajuste a los datos determinando los parámetros que caracterizan a la ecuación logística. Esto nos hace inferir que se pueden tener dos formas de problemas que involucran a la ecuación logística, una donde esta esté dada, y otra donde tenga que ser determinada a raíz de los datos.

El profesor A, sugiere en el inciso f), seguir la línea histórica del surgimiento y desarrollo del modelo (1), desde su punto de vista esto podría ser de importancia. No es casualidad (sino experiencia docente) que lo que él nos sugiere es en realidad otra parte del primer componente del ciclo metodoló- gico de APOE, análisis teórico, que como ya dijimos antes, consta de la revi- sión del desarrollo histórico, la formalización del concepto, y una mirada desde la didáctica de la matemática.

**Tabla 2.** *Narrativa Profesor B*

| Características del profesor | Narrativa |
|---|---|
| Investigador por México del CONAHCYT, comisionado a la DACB de la Universidad Juárez | Profesor B: En matemáticas o áreas afines es fundamental tener a la mano ejemplos lo más simples y prácticos posibles, los cuales permitan dar a conocer ciertas temáticas de interés, que bien pueden servir en determinados problemas de aplicación de la vida real. Un ejemplo concreto es la llamada Ecuación Logística. |

| | |
|---|---|
| Autónoma de Tabasco, desde hace 7 años realizando labores de investigación y docencia. Área de interés: Teoría de Singularidades, Ecuaciones Diferenciales, Modelación Matemática y Sistemas Dinámicos. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores Nivel 1. | Para la comprensión de ésta, se abordan tanto nociones y conceptos de varias ramas de la matemática misma. Por ejemplo, debido a los métodos de solución que se usan para resolverla, podemos hacer referencia al cálculo diferencial e integral, o en su versión más avanzada, "a una aplicación concreta del llamado teorema fundamental del cálculo". Asimismo, el estudio o análisis de la ecuación logística hace necesario comprender la noción de ecuación diferencial ordinaria en una variable, que depende del tiempo, ilustrando así los conceptos propios de una teoría más general: retratos fase, series de tiempo, y sus comportamientos de acuerdo con los parámetros o números que están cambiando y se relacionan con la aplicación que se esté considerando.<br>Por otra parte, las aplicaciones son muy diversas, entre las más notables se destacan en: biología, ecología, química, física, y dentro de la misma matemática, se contemplan subdisciplinas "híbridas" como: biología matemática, ecología matemática, etc.<br>Finalmente, podemos mencionar que esta ecuación es fundamental por sus variadas aplicaciones que envuelve y es muy provechoso combinar su esencia matemática con algún método o teoría de enseñanza-aprendizaje para que la aprecie una audiencia genérica y por tanto, no propiamente especializada. |

Fuente: elaborada por las autoras

Una de las primeras cosas que podemos observar de la narrativa del profesor B, es que para la enseñanza de las matemáticas es de relevancia la utilización de ejemplos sencillos, los cuales tengan aplicabilidad en la vida real. Esto último sin duda, nos dice que debe haber una relación estrecha entre lo matemático y los problemas de interés para los estudiantes. Se nota también que para generar comprensión acerca de la ecuación logística se deben tener nociones básicas de matemáticas, es decir, conceptos previos bien fundamen- tados, así también conocimientos inter e intradisciplinarios. Este profesor, se- ñala por ejemplo la relación entre los parámetros y la aplicación a considerar, es decir, nos está indicando la manera en que se da la vinculación del pro- blema real y la matemática que lo representa por medio de los parámetros adecuados a este problema, podríamos decir, parámetros únicos para repre- sentar un problema único. El profesor B, concluye que es de utilidad aprove- char la esencia matemática de la ecuación logística con las teorías de ense- ñanza-aprendizaje, razón más que ayuda a fundamentar nuestro estudio y la utilización de APOE para generar comprensión.

**Tabla 3.** *Narrativa Profesor C*

| Características del profesor | Narrativa |
|---|---|
| Profesora Investigadora de la Universidad Nacional del Papaloapan y docente por 12 años. Área de interés: Enseñanza y Divulgación de la Ciencia. Profesor con Perfil Deseable PRODEP. | Profesor C: En mi experiencia docente he impartido diversas materias como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Modelación Matemática y Sistemas Dinámicos. Cuando he impartido esta última, he observado el interés de los estudiantes de matemáticas interesados por la geometría fractal. Una buena introducción a la noción de caos matemático, ad hoc con los fractales y conjuntos de Mandelbrot se puede obtener de simulaciones computacionales que están en formato libre en la red. Sin embargo, desde mi experiencia docente e innovando para la educación, he realizado una aplicación llamada logística.m4v con el fin de visualizar las propiedades de la función logística.<br>La función logística es la solución de una ecuación diferencial dada por la expresión del mapeo logístico y sirve para modelar crecimiento de poblaciones, esencial para modelar por ejemplo, poblaciones de contagiados en pandemia, tal es el caso de la reciente pandemia por COVID-19 en donde la ecuación logística se ha dado a conocer de manera general no solo en el ámbito matemático.<br>El mapeo logístico es lo suficientemente simple como para que el público general entienda su definición, pero a la vez contiene la complejidad de caos matemático y la belleza de los fractales. Además, está en la base de los modelos epidemiológicos, y en general de la modelación de crecimiento de poblaciones. Una función tan simple, compleja, bella y útil es una gran oportunidad pedagógica. |

Fuente: elaborada por las autoras

La profesora C, hace referencia a la ecuación logística en su caso dis- creto. En la materia de Sistemas Dinámicos, que ella ha impartido, esta es nombrada como la familia logística, es decir, un conjunto de funciones a un parámetro $\mu$ de la forma $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, y según su narrativa se presenta un comportamiento dinámico caótico para cierto rango del parámetro, con lo que se pueden introducir las nociones básicas de caos matemático (fractales, conjunto de Mandelbrot), de esto se podría inferir que la bifurcación y la apa- rición de un conjunto de Cantor son algunos temas que se pueden abordar utilizando como ejemplo a la familia logística. La profesora también comenta acerca de visualizar las propiedades de la función logística con simuladores computacionales, por lo que de aquí tomamos dos cosas: el uso de recursos tecnológicos y la importancia de las propiedades que la distinguen y la carac- terizan.

Es de relevancia que la profesora C expresa en su narrativa la aplicabili- dad de la ecuación logística en modelos poblacionales, principalmente en la actual pandemia por COVID-19, de esto podemos inferir que los problemas que utilicemos para introducir al estudiante este concepto deben ser desde un ambiente conocido y de interés para él (problemas contextualizados a algo que le motive o involucre, que sea significativo para él).

Por último, pero no menos relevante, la profesora resalta que la ecuación logística discreta (familia logística o mapeo logístico) es una gran oportunidad pedagógica por su simplicidad y al mismo tiempo complejidad y belleza. De este comentario vemos la posibilidad de que su aplicación se dé para la enseñanza de diversos temas que estén relacionados con esta y no solo con el concepto en sí.

**Tabla 4.** *Narrativa Profesor D*

| **Características del profesor** | **Narrativa** |
|---|---|
| Profesor Investigador de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco y docente por 22 años. Área de interés: Ecuaciones Diferenciales, Modelación Matemática y Biología Matemática. Candidato a SNI. | Profesor D: La función logística se utiliza para medir el crecimiento de una población. A pesar de que fue originalmente propuesta en 1838 por Pierre Verhulst para modelar un sistema biológico, en la actualidad es la base para muchos modelos matemáticos principalmente ecológicos y epidemiológicos.<br>El primer modelo propuesto para describir el crecimiento de una población fue el modelo exponencial, sin embargo, no era tan realista ya que en algún momento por razones de sobrepoblación se tenía que frenar la tasa de nacimiento, de ahí se requería definir una cota máxima hasta donde puede crecer una población y de ahí nace la constante de saturación que es la característica del modelo logístico.<br>El modelo logístico básico está dado por $\frac{dp(t)}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$, donde $P$ representa la población y $K$ la constante de saturación (también llamada capacidad de carga) y representa el tope o cota hasta donde la población puede crecer.<br>Como mencioné anteriormente, a pesar de que se propuso en el siglo XIX, en la actualidad la mayoría de los procesos biológicos siguen una dinámica de crecimiento de tipo logístico, por lo que, desde mi punto de vista, es de suma importancia su estudio, análisis e interpretación en el ámbito educativo a nivel universitario en las carreras de ciencias y de aplicación de las ecuaciones diferenciales. |

Fuente: elaborada por las autoras

De la narrativa anterior, se observa que el modelo de Verhulst es base para diversos modelos ecológicos y epidemiológicos, estos tipos de modelos han repuntado en los últimos tiempos por las enfermedades que han azotado a nuestra sociedad (influenza, COVID-19) por lo que los problemas que se podrían sugerir para introducir en el estudiante el concepto ecuación logística podrían ser de este tipo de modelos epidemiológicos pero adecuados al en- torno del estudiante. El profesor D, al igual que el profesor A, enfatiza en la mejora que el modelo logístico vino a dar al modelo exponencial, por lo que se refrenda que, para tener una vasta comprensión del segundo, se debe cono- cer, estudiar y analizar el primero. Así mismo, notamos la interpretación –no matemática– de los parámetros involucrados en la ecuación, por lo que se infiere que es de sumo interés conocer lo que nos quiere decir el modelo para cada problema planteado e identificar lo que significa cada variable, cada pa- rámetro y por supuesto la solución.

A manera de síntesis, de las cuatro narrativas se observa que se enfatiza en la diferencia entre el modelo de Verhulst (modelo logístico) y su antecesor el modelo de Malthus (modelo exponencial), mostrando la relevancia de la creación del segundo: para superar las deficiencias del primero. La historia de su construcción es importante ya que esta misma se hizo con base a resolver un problema demográfico de ese entonces: estimar la cantidad de población de un país en determinado momento.

Los profesores exponen que, a pesar de que se propuso hace tiempo, se sigue considerando como base para muchos modelos matemáticos no solo demográficos, sino también ecológicos, epidemiológicos, físicos, químicos y dentro de la misma matemática formal en el análisis cualitativo de la ecuación diferencial. Por ejemplo, en la reciente aparición del COVID-19, esta ecua- ción se utilizó para estimar la cantidad de contagiados por pandemia, dándose a conocer a un público general no especializado en matemáticas.

Respecto a la modelación, se menciona que la interpretación demográfica (ecológica, biológica, física, etc., según sea el caso) de los términos y los parámetros principales de la ecuación logística son de suma importancia porque le dan sentido a la matemática del problema. Y a partir de los datos de campo se pueden determinar dichos parámetros, los cuales caracterizan a la ecuación logística, estos son: $r, K, x_0$ , a saber, la tasa de crecimiento poblacional, la capacidad de carga o de sustento del ambiente, y la condición inicial: cantidad de población conocida con la que se inicia el modelo, respectivamente.

En referencia a la parte matemática, el comportamiento dinámico de la ecuación logística ofrece una gran riqueza cualitativa según los profesores. Comprender los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral y la no- ción de Ecuación Diferencial Ordinaria proporcionan una base sólida para la comprensión de la matemática asociada a la ecuación logística. El método de solución (por separación de variables o malthusianización), puntos de equili- brio (atractor y repulsor), solución de la ecuación diferencial (gráfica y analí- tica), condiciones iniciales, retrato fase, tabla de datos, términos matemáticos y parámetros, forman parte en la construcción del conocimiento respecto a esta.

Una de las principales observaciones en las narrativas de los profesores, es la separación entre el caso continuo y el caso discreto. Si bien, lo mencio- nado en los párrafos anteriores se refiere al caso continuo, en el caso discreto se señala el comportamiento caótico de la ecuación logística siendo la princi- pal característica la predictibilidad, la cual no se da para el rango $[3,4)$ de valores del parámetro $r$.

La dinámica discreta conlleva al estudio de la geometría fractal en esta ecuación logística (vista como un sistema dinámico) introduciendo la noción del caos matemático. Un sistema dinámico es caótico si tiene dependencia sensible a condiciones iniciales, es topológicamente transitivo, y tiene un con- junto denso de puntos periódicos, condiciones que satisface la ecuación logís- tica discreta. Por medio de simulaciones computacionales (por ejemplo Lo- gística.mv4) se puede visualizar las propiedades de dicho sistema dinámico e identificar la forma en que se da el caos.

A continuación, se muestra un esquema de lo sobresaliente acerca de la ecuación logística de acuerdo con las narrativas de los profesores participan- tes (ver Figura 1).

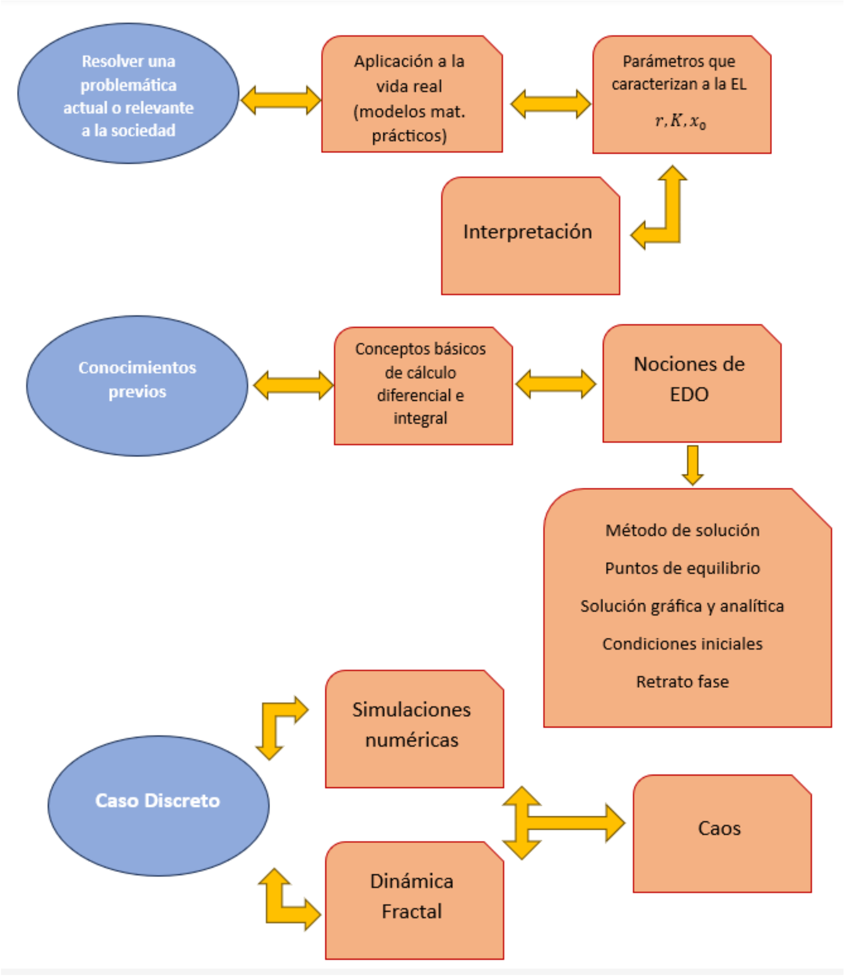


***Figura 1.*** Descomposición genética preliminar con base a las narrativas de los profesores
Fuente: elaborada por las autoras

## Conclusiones y consideraciones finales

La comprensión de la ecuación logística no se da de manera trivial debido a la gran variedad de conceptos matemáticos con los que esta tiene relación, sin embargo, a partir de las narrativas de los profesores, se reconoce la im- portancia que tiene en el nivel universitario. Como producto de estas y desde la praxis docente, en este trabajo se ha logrado realizar una descomposición genética preliminar acerca de la ecuación logística, destacando aspectos importantes a seguir como: utilizar los enfoques discreto y continuo, plantear problemas con problemáticas relevantes y contextualizadas que configuren la relación mundo real - mundo matemático, refrendar los conceptos previos base para la ecuación logística en lo matemático y en la disciplina (o área) de aplicación, desarrollar el modelo de Malthus para incidir en la mejor comprensión del modelo de Verhulst, utilizar herramientas tecnológicas, realizar un análisis cualitativo, plantear problemas de formas distintas: dando el mo- delo matemático, y dando los datos para construir el modelo matemático.

La descomposición genética preliminar aquí presentada se considera base para una descomposición genética más completa de la ecuación logística, con la que se pretende incidir en la comprensión de dicho concepto y apoyar a profesores universitarios en su propia praxis docente.

## Agradecimientos

Los autores agradecen especialmente a los profesores participantes de estas narrativas, quienes con su experiencia docente han contribuido al desarrollo de esta investigación.

## Referencias

1. Ekici, C., Plyley, C. Inquiry-Based Modeling of Population Dynamics with Logistic Differential and Difference Equations. Primus. 2019; 29(6): 553-570. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1484399
2. Kadas, Z. Discrete Population Models: Why They Belong in a Differential Equations Course. Primus. 2018; 28(8): 785-796. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1443532
3. Parra, E., Gordillo, W., Pinzón, W. J. Modelos de Crecimiento Poblacional: Enseñanza-Aprendizaje desde las Ecuaciones Recursivas. Formación Universitaria. 2019; 12(1): 25-34.
4. Bejarano, C. A. Modelos de simulación para el estudio del crecimiento poblacional exponencial. Epsilon. 2005; 1(4): 69-81. https://ciencia.lasalle.edu.co/ep/vol1/iss4/23/
5. Scott, P. Populate or Perish: Logo and the Logistic Equation. Mathematics in School, 2000. 14-16.

6. Medina, M. J., Cortés, C. M., Cortés, I. M, Pérez, F. A., Manzano, C. M. Estudio sobre modelos predictivos para la COVID-19 en Cuba. Medisur. 2020; 18(3): 11.
7. Valero, C. M. A., Lezama, A. F. J. Una experiencia didáctica con estudiantes de bachillerato en torno a la modelación de los datos del COVID19 en México. El cálculo y su Enseñanza. Enseñanza de la Ciencia y la Matemática. 2020; 15(2): 1-19.
8. Winkel, B. J. Sourcing for Parameter Estimation and Study of Logistic Differential Equation. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2012; 43(1): 67-83. https://doi.org/10.1080/0020739X.2011.582178
9. Ang, K. C. A simple model for a SARS epidemic. Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA. 2004; 23(4): 181-188.
10. Habre, S. Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. Journal of Mathematical Behavior. 2000; 18(4): 455-472. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(00)00024-9
11. Rasmussen, C. New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. Journal of Mathematical Behavior. 2001; 20(1): 55-87.
12. Soon, W., Tirtasanjaya, L. L., McInnes, B. Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2011; 42(8): 1023-1039.
13. Rodríguez, J., Ulloa, J. Alternativa didáctica para el estudio del modelo Gompertz. Investigación e Innovación en Matemática Educativa. 2017; 2: 98-114.
14. Pelinovsky, E., Kurkin, A., Kurkina, O., Kokoulina, M., Epifanova, A. Logistic equation and COVID-19. Chaos, Solitons & Fractals. 2020; 140.
15. Shayak, B., Sharma, M. M. Retarded logistic equation as a universal dynamic model for the spread of COVID-19. medRxiy. 2020.
16. Tene, T., Guevara, M., Svozilík, J., Tene-Fernandez, R., Gómez, C. V. Analysis of COVID-19 Outbreak in Ecuador Using the Logistic Model. Emerging Science Journal. 2021; 5: 105-118.
17. Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Fuentes, SR., Trigueros, M., y Weller, K. APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development. Mathematics Education; Nueva York: Springer; 2014.
18. Álvarez-Gayou, J. Cómo hacer investigación cualitativa. Fundamentos y metodología. México: Paidós. 2005.

19. Miramontes, P., Sánchez-Garduño, F. Variables elegantes: Un método para determinar los parámetros en modelos simples en Biología. Miscelánea Matemática, SMM. 1993; 23: 27-38.

**Cómo citar el artículo**

Quilantán Ortega, I., & Rodríguez Vásquez, F. M. (2024). Narrativa de profesores universitarios sobre el concepto ecuación logística: Análisis teórico en APOE. *Revista de Investigación en Matemática y su Enseñanza*, *1*(2), 113-127. https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023784

**Licencia**