RIME
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

ISSN 2810-7187
N°2
volumen 1 - 2024

DOI: https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023647

EL ÁLGEBRA GEOMÉTRICA EN LA ANTIGUA BABILONIA

GEOMETRIC ALGEBRA IN ANCIENT BABYLON

ÁLGEBRA GEOMÉTRICA NA ANTIGA BABILÔNIA

Esptiben Rojas Bernilla *

Recibido: Jun/21/2023 • Aceptado: Sep/16/2023 • Publicado: Dic./01/2023

RESUMEN

Hace 3,500 a 3,000 años a.C. los matemáticos babilónicos imaginaban problemas con finalidades teóricas y recreativas, sin tener las actuales técnicas de cálculo, ni mucho menos fórmulas.
Los babilónicos fueron capaces de resolver ecuaciones de segundo grado, y sistema de ecuaciones. Aunque en las tablillas solo se presenta enunciados y procedimientos algorítmicos, sin fundamentación teórica, véase [2], [3] y [8] En el presente trabajo fundamentamos el uso de la llamada *geometría ingenua*, hoy llamada *álgebra geométrica*, para resolver sus problemas algebraicos plateados en [3] y [8] .

Palabras clave: álgebra babilónica; álgebra geométrica; matemática babilónica.

ABSTRACT

3,500 to 3,000 years ago B.C. Babylonian mathematicians imagined problems for theoretical and recreational purposes you go, without having the current calculation techniques, much less formulas. The Babylonians were able to solve second degree equations, and system of equations. Although the tablets only present statements and procedures, algorithmic foundations, without theoretical foundation, see [2] [3] y [8]. In the present work we base the use of the so-called naive geometry in the Babylonians, given the evidence recorded in [3] y [8].

Keywords: babylonian algebra; geometric algebra; babylonian mathematics.

*Universidad de Magallanes, Punta Arenas (Chile), Departamento de Matemática y Física, esptiben.rojas@umag.cl; https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023647

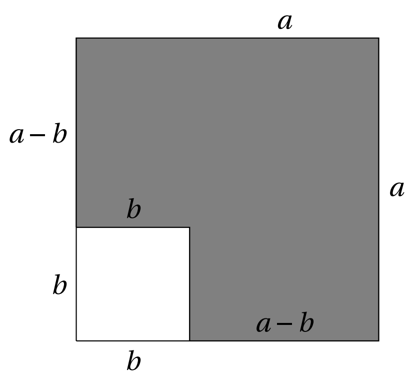
RESUMO

3.500 a 3.000 anos atrás a.C. Os matemáticos babilônios imaginaram problemas para fins teóricos e recreativos. você vai, sem ter as técnicas de cálculo atuais,muito menos fórmulas. Os babilônios conseguiram resolver equações de segundo grau e sistema de equações. Embora os tablets apresentem apenas declarações e procedimentos, fundamentos algorítmicos, semfundamento teórico, ver [2] [3] y [8]. No presente trabalho baseamos o uso de a chamada geometria ingênua nos babilônios, dadas as evidências registradas em[3] e [8].

Palavras-chave: álgebra babilônica; álgebra geométrica; matemática babilônica.

El álgebra babilónica

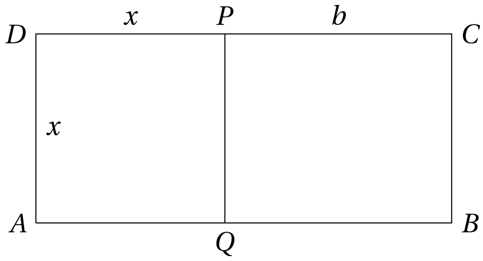
Uno de los problemas en que se enfrentaron fue expresar la diferencia de cuadrados en el producto, con ello podían solucionar problemas de sistemas de ecuaciones. Es plausible pensar que el escriba, dibujaba lo siguiente:



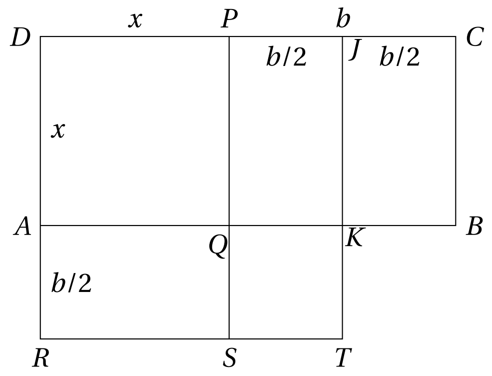
Ante la necesidad de calcular la diferencia de dos cuadrados $a^2 - b^2$, se calculaba el área de un rectángulo equivalente de lados $a + b$ y $a - b$.

Con el auxilio de la geometría ingenua, podían resolver casos particulares de ecuaciones de segundo grado, de la forma siguiente:

1. Para ecuaciones del tipo $x.x + bx = c$, el escriba, realizaba el siguiente dibujo equivalente a la ecuación:



El área del rectángulo $ABCD$ es c. Luego adosaban un rectángulo de lados $b/2$ y $x+b/2$, obteniendo el dibujo.



La solución visual del escriba era: $x = RT - ST$, pero RT es el lado del cuadrado $RTJD$ y $ST = b/2$, para calcular RT se procede a calcular:
RT^2 = área del cuadrado $RTJD$ = área del rectángulo $AKJD$ + área del rectángulo $RSQA$ + área del cuadrado $STKQ$ = c + área del cuadrado $STKQ$ = c + $(\frac{b}{2})^2$, luego $RT = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c}$
Finalmente obtenían el algoritmo, que necesitaban para resolver el problema, en nuestra actual notación se escribe:

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - (\frac{b}{2}).$$

Para ejemplificar el lenguaje babilónico usado para el planteamiento y solución de los problemas propuestos en las tablillas, véase [7] y [8]. Indicaremos la siguiente traducción en nuestro idioma:

a) La superficie de mi lado enfrentado he acumulado: 0;45 la proyección

b) Pon, rompe 1 por la mitad, 0;30 y 0;30 sostén.

c) 0;15 a 0;45 añade: es 1, 1 el lado del cuadrado. 0;30 que has hecho sostener

d) En el interior de 1 corta: 0;30 el lado enfrentado.

Como se puede ver, el lenguaje usado es impreciso, en 1)se plantea el problemas y luego describe los pasos a seguir por el discípulo. En lo que sigue no describiremos los enunciados y las soluciones en el estilo babilónico, nos interesa, penetrar en su pensamiento matemático. El anterior planteamiento sería,
Ejemplo
Calcular el valor de una magnitud, conociendo la suma de su cuadrado y el lado 0;45. No se indican las unidades métricas.
Solución
Actualmente plantearíamos la ecuación $x^2 + x = 0,45$ los babilónicos usarian el algoritmo descrito anteriormente en la fórmula, es decir $\frac{b}{2} = \frac{1}{2} = 0;30$ y $(0;30)^2 = 0;15$, se obtiene

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - (\frac{b}{2})^2 = \sqrt{(0;30)^2 + 0;45} - 0;30 = 0;30$$

■

Ejemplo

En una tablilla babilónica se planteaba: Acumular un cuadrado, véase [3], su lado y un tercio de este da 0;55

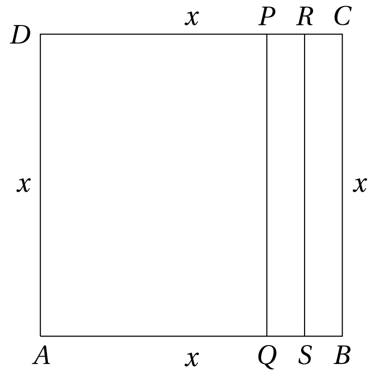
Solución

Actualmente plantearíamos la ecuación $x^2+x+\dfrac{1}{3}x=0;55$ en babilónico tenemos que $1=0;60$ y $\frac{1}{3}=0;20$, podemos tener $x^2+(0;60+0;20)x=0;55$ ósea $x^2+1;20x=0;55$, de esta forma podían los babilónicos seguir el algoritmo anterior, para obtener

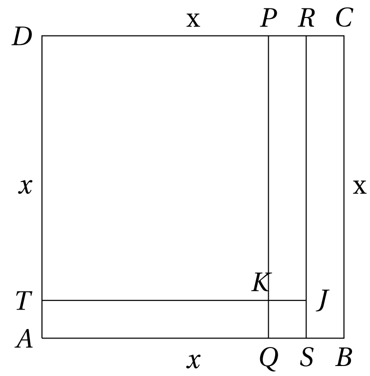
$$x=\sqrt{(\frac{b}{2})^2+c}+(\frac{b}{2})^2=\sqrt{(0;40)^2+0;55}-(0;40)=\sqrt{0;26,40+0;55}-0;40=1;10-0;40=0;30$$

■

2. Para ecuaciones del tipo $x.x=bx+c$, el escriba, realizaba el siguiente dibujo equivalente a la ecuación:



$c=$ área del cuadrado $AQPD$, $PC=QB=b$ y $PR=RC=QS=SB=\frac{b}{2}$, el escriba visualizaba que $x=DR+RC$, para calcular DR procedía a trazar TJ como se indica



DR^2= área del cuadrado $TJRD=c+$ área del rectángulo $KJRP$ - área del rectángulo $AQKT=c+$ área del cuadrado $QSJK=c+(\dfrac{b}{2})^2$, lo que significa que $DR=\sqrt{(\dfrac{b}{2})^2+c}$, por lo tanto, en nuestra actual notación tenemos

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} + (\frac{b}{2})$$

Ejemplo
En una tablilla babilónica, véase [7], decía: He substraído de la superficie el tercio del lado de mi cuadrado; tengo 0;5.
Solución
En nuestra notación se plantearía la ecuación $x^2 = \frac{1}{3}x + 0;5$ que sería resuelta por los babilónicos, siguiendo el algoritmo que indica la fórmula anterior, esto es:

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} + (\frac{b}{2})^2 = \sqrt{(0;10)^2 + 0;5} + 0;10 = \sqrt{0;1,40 + 0;5} + 0;10 = 0;20 + 0;10 = 0;30$$

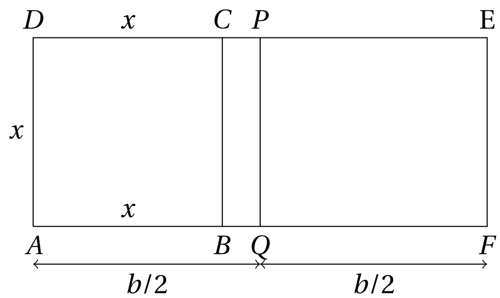
■
Ejemplo
En una tablilla babilónica se platea, véase [8]: Si el lado de un cuadrado es substraído de su cuadrado, dá 14;30.
Solución
En nuestra notación para este problema se plantea resolver: $x^2 = x + 14;30$ que sería resuelta por los babilónicos, siguiendo el algoritmo que indica la fórmula anterior, esto es:

$$x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} + (\frac{b}{2})^2 = \sqrt{(0;30)^2 + 14;30} + 0;30 = \sqrt{0;15 + 14;30} + 0;30 = 3;50,26 + 0;30 = 4;20,26$$

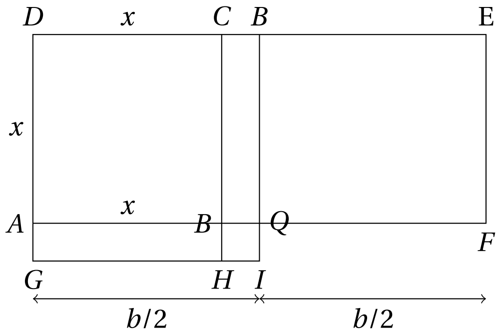
■

3. Para ecuaciones del tipo $x.x + c = bx$, hay dos casos, dependiendo del valor de b el escriba, realizaba los siguientes dibujos equivalente a la ecuación:

   - **Primer caso:** considerando x^2 es el área del cuadrado $ABCD$, y c = área $BFEC$

   el escriba, adosaba un rectángulo $AGIQ$ de dimensiones $CP = AG = \frac{b}{2} - x$ y $GI = \frac{b}{2}$, haciendo el siguiente dibujo,



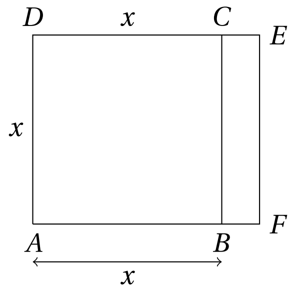
para el escriba $x = DP - CP$, como $DP = GH = \frac{b}{2}$ sólo falta calcular CP, que es el lado del cuadrado $HIQB$.

CP^2 = área del rectángulo $GIPD$ - área del rectángulo $BFEC$ $=(\frac{b}{2})^2 - c$, por lo tanto $CP = (\sqrt{\frac{b}{2})^2 - c}$.

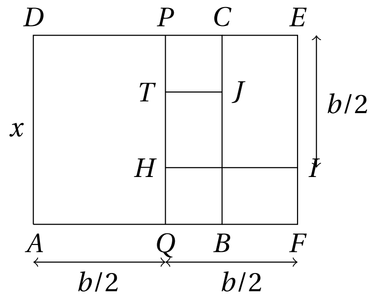
Lo que muestra el algoritmo que el escriba dictaba a sus discípulos, que en nuestra notación actual sería

$$x = (\frac{b}{2}) - \sqrt{\frac{b^2}{2} - c}$$

- **Segundo caso:** considerando x^2 es el área del cuadrado $ABCD$, $AF = DE = b$ y c es el área del rectángulo $BFEC$.



luego el escriba dibujaba P y Q en la mitad de $b = AF = DE$,



para el escriba $x = DP + PC$, pero $DP = \frac{b}{2}$, y PC es el lado del cuadrado $PCJT$,

PC^2 = área del cuadrado $HIEP$ - c = $(\frac{b}{2})^2 - c$, por lo tanto $PC = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$, lo que muestra el algoritmo que el escriba dictaba a sus discípulos, que en nuestra notación actual sería

$$x = (\frac{b}{2}) + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c}$$

Ejemplo
Resolver usando el método babilónico $x^2 + 7;30 = 6;30x$
Solución
Usando el algoritmo babilónico tenemos:

$$x = (\frac{b}{2}) \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - c} = 3;15 \pm \sqrt{(3;15)^2 - 7;30} = 3;15 \pm \sqrt{10;33,45 - 7;30} = 3;15 \pm 1;45 = 5 \text{ o } 1;30$$

■

Los babilónicos también eran capaces de resolver sistemas de ecuaciones simples como :
Ejemplo
El siguiente problema se encontró en una tablilla babilónica, véase [8]:
Encontrar los lados de un rectángulo si su semiperímetro es 13/2 y su área es 15/2
Solución
El problema plateado es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} x + y &= 13/2 \\ xy &= 15/2 \end{aligned}$$

El método ideado por los antiguos babilónicos es convertir este problema en una diferencia de cuadrados, haciendo variaciones de los lados x e y del rectángulo;

$$x = \frac{13}{4} + z, \quad y = \frac{13}{4} - z$$

luego

$$(\frac{13}{4} + z)(\frac{13}{4} - z) = \frac{15}{2}$$

, por geometría ingenua, los babilónicos deducían $\frac{169}{16} - z^2 = \frac{15}{2}$, de donde $z^2 = \frac{169}{16} - \frac{15}{2} = \frac{49}{16}$, luego $z = \frac{7}{4}$ por lo tanto,

$$x = \frac{13}{4} + \frac{7}{4} = 5, \quad y = \frac{13}{4} - \frac{7}{4} = \frac{3}{2}$$

■

Otro tipo de ecuaciones que resolvían los babilónicos, eran más elaboradas como por ejemplo, véase [8]:
Ejemplo
Resolver el siguiente problema babilónica

$$x.y = 600, \quad (x + y)^2 + 120(x - y) = 3700$$

Solución
La idea del escriba era hacer un cambio de variable $z = x - y$, para ello conocían que

$$(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy,$$

luego la ecuación original se transformaba en

$$(x-y)^2 + 120(x-y) = 1300$$

, por lo tanto, es sólo cuestión de resolver la ecuación $z^2 + 120z = 1300$, que por geometría ingenua se reduce a

$$z = \sqrt{(\frac{120}{2})^2 + 1300} - \frac{120}{2} = \sqrt{4900} - 60 = 70 - 60 = 10$$

con ello se obtenía el sistema

$$\begin{aligned} z = x - y &= 10 \\ xy &= 600 \end{aligned}$$

que resolvía usando el método del ejemplo anterior, obteniendo $x = 30,\ \ y = 20$.

■
En los dos próximos ejemplos los babilónicos buscan encontrar los lados de dos cuadrados y la suma o diferencia de sus respectivos lados, véase [8].
Ejemplo
Encontrar los lados de dos cuadrados, si la suma de sus áreas es $0;21,40$ y la suma de sus lados es $0;50$
Solución
El problema planteado es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 0;21,40 \\ x + y &= 0;50 \end{aligned}$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (0;50)^2 = 0;41,38$$

reemplazando los valores se obtiene

$$0;21,40 + 2xy = 0;41;38$$

para obtener

$$xy = 0;10,1$$

con lo cual se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} x + y &= 0;50 \\ xy &= 0;10,1 \end{aligned}$$

Usando el método babilónico para este tipo de sistema tenemos: $x = 0;25 + z$ y $y = 0;25 - z$

$$xy = (0;25)^2 - z^2 = 0;10,1 \Longrightarrow z^2 = 0;10,21 - 0;10,1 = 0;0,22,$$

de donde $z = \sqrt{0;0,22} = 0;4,41$ finalmente

$$\begin{aligned} x &= 0;25 + 0;4 \ = 0;30 \\ y &= 0;25 - 0;4 \ =';0;20 \end{aligned}$$

■

Ejemplo
En una tablilla babilónica, véase [3] se pide calcular los lados de un rectángulo, cuya diagonal es $1;15$ y su superficie $0;45$.
Solución
El escriba planteaba el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (1;15)^2 \\ x.y &= 0;45 \end{aligned}$$

Usando el método babilónico para este tipo de sistema tenemos:

$$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = (1;15)^2 - 2(0;45) = 1;33,45 - 1;30 = 0;3,45$$

luego

$$\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{0;3,45}}{2} = \frac{0;15}{2} = 0;7,30$$

De la misma manera

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = (1;15)^2 + 2(0;45) = 1;33,45 + 1;30 = 3;3,45$$

luego

$$\frac{x+y}{2} = \frac{\sqrt{3;3,45}}{2} = \frac{1;45}{2} = 0;52,30$$

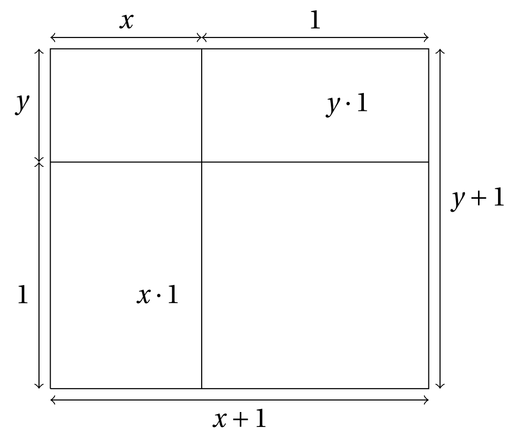
con estos cálculos procedían a calcular las dimensiones del rectángulo,

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 0;52,30 + 0;7,30 = 1$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 0;52,30 - 0;7,30 = 0;45$$

■

Los babilónicos en sus soluciones, procedían a utilizar algunos algoritmos de cálculo, que el escriba lo deducía por geometría ingenua. Por ejemplo,



En este dibujo el escriba podía saber que si en algún problema tenía $x.y+x+y=1$ entonces podia deducir que $(x+1)(y+1)=2$, veámos como usaban esta deducción (el problema lo hemos adaptado a nuestro lenguaje moderno)

Ejemplo

En una tablilla babilónica se pide calcular las dimensiones de un rectángulo de lados x e y que cumplen:

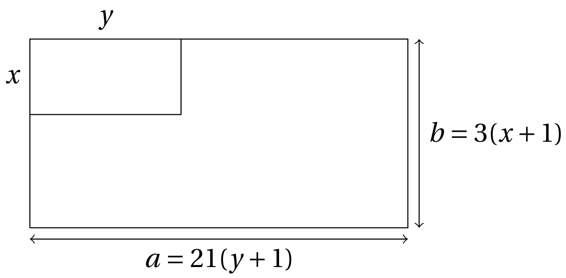
$$\begin{aligned} x.y+x+y &= 1 \\ \frac{1}{17}(3x+4y)+y &= 0;30 \end{aligned}$$

Solución

El escriba indicaba a sus discípulos multiplicar por 17, obteniendo

$$(3x+4y)+17y = 0;30\times 17 = 8;30,$$

luego en el dibujo



$$a+b = 3(x+1)+21(y+1) = 3x+21y+3+21 = 8;30+24,$$

luego $a+b=32;30$, por lo tanto $\frac{a+b}{2}=16;15$

De otro lado, como $x.y+x+y=1$, tenemos $a.b=3(x+1)21(y+1)=63\times 2=2,6$

Obteniendo el problema

$$\begin{aligned} a+b &= 32;30 \\ a.b &= 2,6 \end{aligned}$$

Para ello era suficiente obtener $\frac{a-b}{2}$, de la siguiente manera

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab, \Longrightarrow (\frac{a-b}{2})^2=(\frac{a+b}{2})^2-ab$$

reemplazando los valores tenemos

$$\frac{a-b}{2}=\sqrt{(16;15)^{-}2,6}=\sqrt{4,24-2,6}=\sqrt{2,18}=11;45$$

$$\begin{aligned} a=21(y+1) &= \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=16,15+11;45=27;60=28 \\ b=3(x+1) &= \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=16;15-11;45=4;30 \end{aligned}$$

finalmente los discípulos calculaban x e y como,

$$y+1=\frac{1}{21}(28)=1;20 \Longrightarrow y=0;20$$

$$x+1=\frac{1}{3}(4;30)=1;30 \Longrightarrow x=0;30$$

. $\blacksquare$

Conclusiones

En el presente artículo hemos demostrado que los antiguos babilónicos, usaban el álgebra geométrica para, resolver ciertas ecuaciones de segundo grado: Es muy probable que estos métodos solo hallan sido de conocimento exclusivo de los escribas, y que en las tablillas los discípulos solo ejecutaban los cálculos algoritmicos.
En resumen tenemos:

Tipo de ecuación	Solución babilónica
$x.x+bx=c$	$x=\sqrt{(\frac{b}{2}^{2}+c}-(\frac{b}{2})$
$x.x-bx=c$	$x=\sqrt{(\frac{b}{2}^{2}+c}+(\frac{b}{2})$
$x.x+c=bx$	$x=(\frac{b}{2})+\sqrt{(\frac{b}{2})^{2}-c},\ \overline{x}=(\frac{b}{2})-\sqrt{(\frac{b}{2})^{2}-c}$

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad de Magallanes por facilitarme el espacio académico para este trabajo. A mis estudiantes de la Pontificia Universidad Católica de Chile (2021-I) en donde impartí la asignatura de Historia de la Matemática. A mis estudiantes de la Universidad de Magallanes, en donde imparto la asignatura de Historia de la Matemática.
Deseo expresar mi agradecimiento a mi esposa Nancy, por su paciencia, amor y respeto, sin estos sentimiento compartidos, no hubiera sido posible realizar este trabajo.

Referencias Bibliográficas

1. Esptiben Rojas B. *Tòpicos de Historia de la Matemàtica.* (Libro completo, aún sin publicar).
2. Sir Thomas Herth. *A History of Greek Mathematics.* Vol 1 . Dover Publications, Inc, 1981.
3. Piedad Yste Leciñena. *Matemáticas en Mesopotamia.* Editorial Dykinson, 2013.
4. Carlos Maza Gómez. *Las Matemáticas de la Antiguedad y su Contexto Histórico.* Publicaciones Universidad de Sevilla. 2000.
5. David M. Burton. *The History of Mathematica.* McGraw-Hill. 4ta Edición. 1999.
6. Victor J. Katz. *A History of Mathematics.* Addison Wsley Longman. 2da. Edición 1998.
7. Lucas N.H.Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient. *The Historical Roots of Elementary Matehmatics.* Dover Publications, Inc 1976.
8. B.L.van der Waerden. *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer Velang. 1983.

Cómo citar el artículo

Rojas Bernilla, E. (2024). El álgebra geométrica en la antigua babilonia. Revista de Investigación en Matemática y su Enseñanza, 1(2), 41-52. https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023647