RIME
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

ISSN 2810-7187
Nº2
volumen 1 - 2024

DOI: https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400023646

ACTIVIDADES PARA LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA PARCIAL ANALIZADAS DE ACUERDO A LA IDONEIDAD DIDÁCTICA

ACTIVITIES FOR TEACHING THE PARTIAL DERIVATIVE ANALYZED ACCORDING TO DIDACTIC SUITABILITY

ATIVIDADES PARA ENSINO DA DERIVADA PARCIAL ANALISADAS SEGUNDO ADEQUAÇÃO DIDÁTICA

Víctor Larios Osorio[1] • Rosario Angélica Jiménez Sánchez[2]

Recibido: Jun/11/2023 • Aceptado: Dic/16/2023 • Publicado: Dic/01/2024

RESUMEN

La noción de idoneidad didáctica es un constructo teórico-metodológico desarrollado como parte del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos que puede utilizarse como herramienta para el análisis de situaciones o procesos de enseñanza a fin de determinar el grado de adaptación entre la enseñanza y el aprendizaje. En este trabajo se presenta la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica en el análisis de una serie de actividades diseñadas para el estudio de la derivada parcial, principalmente con respecto a las facetas epistémica, cognitiva y mediacional. Al final, y considerando indicadores de idoneidad didáctica, se exponen reflexiones al respecto en las que se identifican algunas ventajas en el uso de las herramientas digitales y la complejidad de los objetos matemáticos estudiados.

Palabras clave: Derivada parcial; Significado parcial; Idoneidad didáctica; Diseño didáctico.

---

[1] Universidad Autónoma de Querétaro, México; Facultad de Ingeniería; vil@uaq.mx.
ORCID iD 0000-0002-4454-8516
[2] Universidad Autónoma de Querétaro, México; Facultad de Ingeniería; rosariojs@uaq.mx.
ORCID iD 0000-0002-4950-4221

Abstract

The notion of didactic suitability is a theoretical-methodological construct developed as part of the Ontosemiotic Approach (OSA) of Mathematical Knowledge and Instruction that can be used as a tool for the analysis of teaching situations or processes in order to determine the degree of adaptation between the teaching and learning. This paper presents the application of the didactic suitability criteria in the analysis of a series of activities designed for the study of the partial Derivative, mainly with respect to the epistemic, cognitive and mediational facets. At the end, and considering indicators of didactic suitability, a series of reflections on this matter are exposed, in which some advantages in the use of digital tools and the complexity of the mathematical objects studied are identified.

Keywords: Partial derivative; Partial meaning; Didactic suitability; Didactic design.

Resumo

A noção de adequação didática é um construto teórico-metodológico desenvolvido no âmbito da Abordagem Ontosemiótica (EOS) do Conhecimento e do Ensino Matemático que pode ser utilizado como ferramenta de análise de situações ou processos de ensino a fim de determinar o grau de adaptação entre o ensinar e aprender. Este trabalho apresenta a aplicação dos critérios de adequação didática na análise de uma série de atividades destinadas ao estudo da derivada parcial, principalmente no que diz respeito às facetas epistêmica, cognitiva e mediacional. Ao final, e considerando indicadores de adequação didática, são apresentadas reflexões a esse respeito nas quais são identificadas algumas vantagens na utilização de ferramentas digitais e na complexidade dos objetos matemáticos estudados.

Palavras-chave: Derivativo parcial; Significado parcial; Adequação didática; Projeto didático.

Introducción

En la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Querétaro (México), al igual que en otras muchas instituciones, los cursos básicos en esta área incluyen lo referente al Cálculo Diferencial e Integral de funciones reales de una y de varias variables, lo que amplía la visión que se tiene al respecto en los niveles educativos previos y permite abordar situaciones más amplias de la ciencia, la ingeniería y la industria. Es por ello que en la formación de los ingenieros el cálculo se convierte en una disciplina trascendental, pues es una herramienta útil y potente para su desarrollo académico y profesional.

Esta es una de las razones por las que existe el interés de abordar situaciones de enseñanza en estos cursos, pues de eso depende en buena medida la construcción de significados por parte de los alumnos y las prácticas matemáticas que desarrollan. En este sentido, ya se han realizado trabajos acerca de los significados que tienen los estudiantes sobre objetos matemáticos importantes del Cálculo, como es el caso de la derivada y la antiderivada, en nuestra misma universidad para tener ideas sobre los antecedentes de los alumnos [1-4] y así proponer actividades para los cursos, como por ejemplo las que se plantean en [5] en una primera aproximación a actividades relacionadas con la noción de derivada parcial de funciones de varias variables.

Este trabajo proviene de acciones que se sitúan entre la investigación y la práctica educativa, no subordinando aquella únicamente al interés de la indagación o la curiosidad, sino a la propuesta fundamentada de materiales para el aula que, a su vez, se conviertan en una fuente de investigación y que cumplan con un papel académico fundamental para el desarrollo educativo [6].

Para el desarrollo de este trabajo se ha considerado el Enfoque Ontosemiótico sobre el Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) [7,8] como marco de referencia teórico principalmente por dos razones: en primer lugar, el EOS contiene herramientas metodológicas que permiten conectar los aspectos de investigación teórica y descriptiva con las prácticas del proceso de instrucción [9]; y, en segundo lugar, una de estas herramientas es la noción de idoneidad didáctica, la que permite analizar o evaluar los procesos de enseñanza ya sea a priori, o bien a posteriori [10].

Para este trabajo se ha tomado en cuenta la idoneidad didáctica en un análisis a priori, por medio de criterios que la operativizan en las diferentes facetas, con la finalidad de tener una orientación en el diseño de actividades didácticas para el estudio de la derivada parcial en el contexto de un curso de Cálculo Multivariable.

En la siguiente sección se ahonda más sobre la noción de idoneidad didáctica y sus criterios, para después presentar las actividades diseñadas. La reflexión sobre los criterios considerando esas actividades aparece después, junto con comentarios al respecto.

LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD

Como se mencionó antes, la herramienta que proporciona el EOS como un medio para organizar y sistematizar la información que se tiene o que se puede proponer sobre el proceso de enseñanza es la noción de idoneidad didáctica, la que se considera como sigue:

“En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).” [10] (p. 268)

Además, debido a que en el EOS se consideran seis facetas que abarcan los diferentes ámbitos del proceso educativo (la epistémica, la cognitiva, la afectiva, la interaccional, la mediacional y la ecológica), el estudio de la idoneidad didáctica no se restringe a una sola faceta, sino que las considera a todas y sus interrelaciones. Así, el uso de esta noción considera el contexto particular del proceso educativo que se está tomando en cuenta (nivel educativo, ámbito social de la escuela, condiciones de interacción virtual/presencial, etcétera). Esta característica es importante, pues tiene la ventaja de resolver el problema de especificidad para un profesor en particular. Aunque, por otro lado, hace tener la consideración de que el objetivo no es lograr el nivel ideal en todas las facetas, sino conseguir un equilibrio entre los elementos de las facetas que sea acorde a la situación de enseñanza específica.

Ahora bien, en términos operativos resulta conveniente tener descriptores específicos para las diversas facetas y para ello hemos considerado los propuestos por Godino, Batanero, Burgos y Gea [9], los cuales son una reorganización de propuestas previas [11-13]. Estos descriptores aparecen en la Tabla 1 y la Tabla 2.

Tabla 1. *Criterios de idoneidad y sus componentes de las facetas epistémica y cognitiva*

Faceta	Criterios según componentes
Epistémica	**Significados**

(Representatividad) Los significados institucionales del contenido y las configuraciones de objetos y procesos implementados deberían ser representativos del significado global de referencia, teniendo en cuenta las circunstancias contextuales y personales de los sujetos implicados.	Se deberían tener en cuenta los diversos objetos primarios implicados en la actividad matemática (situaciones, lenguajes, conceptos y propiedades, procedimientos y argumentos) que conforman los significados parciales del contenido, seleccionando aquel o aquellos cuyo estudio se adapta a las circunstancias contextuales y personales de los sujetos implicados. Todo ello ha de estar contextualizado en situaciones comprensibles para el estudiante. **Relaciones (conexiones)** Se deberían relacionar entre sí los significados parciales estudiados y los objetos que intervienen en las prácticas correspondientes, así como con el contenido de otros temas que el estudiante ya conoce. **Procesos** Se debería tener en cuenta la diversidad de procesos (secuencias de prácticas) de los cuales emergen los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas (problematización, representación, definición, generalización, modelización, etc.). **Conflictos epistémicos** Se debería evitar las discordancias entre los significados de los objetos y procesos implementados y los correspondientes a la institución de referencia (ausencia, además, de errores y ambigüedades).
Cognitiva	**Significados personales (aprendizajes)**
(Proximidad y reto alcanzable) Los objetivos de aprendizaje deberían suponer un reto cognitivo alcanzable para los estudiantes, teniendo en cuenta sus circunstancias contextuales y personales.	Se debería lograr que los significados personales construidos por los estudiantes se correspondan con los significados institucionales pretendidos o implementados. La evaluación de los aprendizajes logrados debería tener en cuenta las características personales de los estudiantes y los distintos niveles de comprensión y competencia que pueden alcanzar. La evaluación debería servir para mejorar el proceso instruccional. **Relaciones (conexiones)** El aprendizaje debería ser de tipo relacional, de modo que los estudiantes sean capaces de comprender y relacionar los distintos significados incluidos en el proceso de enseñanza y objetos implicados. **Procesos** Se debe tener en cuenta la competencia del estudiante para implementar procesos matemáticos específicos del contenido (modelización, generalización, resolución o planteamiento de problemas, prueba, representación, etc.)

	y metacognitivos (reflexión sobre los propios procesos de pensamiento matemático). **Conocimientos previos** El proceso de instrucción debería considerar los conocimientos previos que tienen los estudiantes a los que va dirigido para abordar el estudio del contenido pretendido. **Diferencias individuales** El proceso de instrucción debería apoyar a los estudiantes según sus diferencias individuales en conocimientos previos y estilos de aprendizaje en el proceso de estudio del contenido pretendido o implementado. **Conflictos cognitivos** El proceso de instrucción debería poder identificar en los estudiantes los conflictos cognitivos que la investigación didáctica ha revelado como propios y característicos del contenido pretendido o implementado y ayudarles a superarlos.

Fuente: Tomado de [9] (pp. 15-16)

Tabla 2. *Criterios de idoneidad de las facetas afectiva, interaccional, mediacional y ecológica*

Faceta	Criterios según componentes
Afectiva	**Implicación** El proceso de instrucción debería lograr el mayor grado posible de implicación del alumnado (interés, motivación, autoestima, disposición).
Interaccional	**Negociación** Las configuraciones y trayectorias didácticas que se implementen deberían permitir identificar los conflictos semióticos potenciales y poner los medios adecuados para su resolución.
Mediacional	**Disponibilidad** Se debería disponer de los recursos materiales y temporales adecuados para el desarrollo óptimo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
Ecológica	**Adaptación** El proceso de instrucción debería estar en concordancia con el proyecto educativo del centro y la sociedad, teniendo en cuenta los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y las innovaciones basadas en la investigación educativa.

Fuente: Tomado de [9] (p. 17)

Es importante mencionar que estos criterios proporcionan orientaciones flexibles dependientes del contexto, como ya se ha dicho, no son reglas que se aplican de manera binaria (es decir, se cumplen o no). Por otro lado, otra de sus características es que pueden ser útiles en un momento previo al proceso de enseñanza, en el cual se realiza el diseño didáctico, o bien posterior al momento de enseñanza en los que se valora el proceso educativo que se implementó [10]. En el caso de este trabajo se está considerando ese primer momento del diseño de las actividades para su implementación. Para ello uno de los puntos a considerar es el objeto matemático que se aborda en el diseño didáctico y que se ahonda en el siguiente apartado.

Significados de la Derivada

El objeto matemático principal que se aborda en la serie de actividades desarrolladas es el de *derivada parcial* de funciones reales de varias variables. En el contexto particular de la institución universitaria mexicana donde se está llevando a cabo este trabajo, este tema se aborda en el tercer curso de Cálculo, que corresponde al Cálculo Multivariable, y que forma parte del denominado "tronco común" de todas las carreras de ingenierías.

Un antecedente directo de este objeto matemático es el de derivada de una función en una variable, en la literatura existen varios trabajos que se ocupan de su explicación y desarrollo histórico fuera del contexto escolar [14-17], lo cual permite hacer un primer acercamiento a su evolución como objeto matemático desarrollado para abordar y resolver problemas o situaciones por medio de las prácticas matemáticas de los protagonistas. Además, estas observaciones pueden tomarse como base para las consideraciones de este trabajo, pues la derivada parcial es una ampliación de la derivada, ya que en ambos casos se refieren a una propiedad de variación de una función con respecto a una variable.

Así pues, y en concordancia con la aproximación teórica seleccionada, se ha considerado el significado que emerge del conjunto de las prácticas de la comunidad matemática sobre la derivada, las que constituyen el significado institucional del objeto matemático [18] y se puede considerar como un significado holístico del objeto, el cual está compuesto por significados parciales desarrollados para cada uno de los momentos de su evolución en los diversos contextos histórico-filosóficos.

En este sentido, Pino-Fan, Godino y Font [19] han mostrado en un estudio histórico-ontológico que se pueden identificar nueve momentos que corresponden a igual número de significados parciales de la derivada ya que las prácticas matemáticas en cada uno de ellos estuvieron orientadas a abordar situaciones específicas. Estos significados parciales son:

1. Prácticas para encontrar rectas tangentes a curvas en la Geometría.
2. Estudios sobre la variación en el periodo de la edad media.
3. Uso de métodos algebraicos para encontrar rectas tangentes a curvas.
4. Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes.
5. Ideas intuitivas de la noción de límite para la obtención de máximos y mínimos.
6. Uso de métodos infinitesimales en la obtención de rectas tangentes.
7. El cálculo de fluxiones.
8. El cálculo de diferencias.
9. La concepción de la Derivada como un límite.

Así pues, estos significados parciales aumentan en su complejidad semiótica y de abstracción conforme se acumularon los conocimientos y el paso del tiempo. Es válido señalar en este punto que la visión en muchos libros de texto se centra en el último significado parcial (quizá por una razón de orden formal o de economía) pero en términos educativos ello implicaría suponer que los alumnos, como individuos, hubiesen tenido un desarrollo cognitivo similar a la evolución histórica-epistemológica del objeto matemático.

Al considerar los criterios de idoneidad relativa a la faceta epistémica es necesario tomar en cuenta esa diversidad en los significados parciales para el diseño de actividades y procesos de enseñanza. La omisión en este tipo de consideraciones podría llevar a (lo que podríamos llamar) inconsistencias como las que mencionan Arcos y Sepúlveda [20] (p. 80):

"En los libros actuales de cálculo podemos ver que, del cálculo leibniziano, apenas se percibe algo de la terminología y simbología de finales del siglo XVII. Las ideas básicas están ausentes debido a que se ha excluido toda alusión a los infinitamente pequeños, sin embargo, en muchos de los textos de ciencias básicas y de la ingeniería, el cálculo utilizado es notablemente más próximo al leibniziano que al que se presenta en los textos para la enseñanza del cálculo."

Además, los diferentes significados parciales, así como las representaciones semióticas que tienen asociadas, permiten darles una mayor riqueza a los diseños didácticos y, de forma tentativa, aproximarse a los significados personales de los alumnos para lograr un avance apropiado de los significados pretendidos.

En este sentido, por ejemplo, Arcos [21] insiste en utilizar una aproximación que considere una visión que incluya las ideas relacionadas con la operación de cantidades infinitamente pequeñas como medio para lograr la comprensión por parte de los alumnos de Ingeniería. Esto no sólo por el hecho de vincularse con el desarrollo cognitivo de los alumnos, sino porque es consistente con el abordaje de problemas en contextos físicos que están presentes en su formación académica. Y por su parte, Rojas, Mejía y Duarte [22] proponen una aproximación con uso de software graficador dinámico que aprovecha las representaciones semióticas gráficas y que relaciona la derivada direccional de una función de dos variables con las nociones de pendiente de la recta tangente a la superficie de la gráfica y con la razón de cambio de la función.

Estas nociones se han considerado para el diseño de las actividades que a continuación se presenta.

DISEÑO DIDÁCTICO

Se han diseñado cuatro actividades para ser trabajadas de manera remota aprovechando el campus virtual de la universidad que está basado en el software de gestión de aprendizaje llamado *Moodle*. Las características generales de cada una de estas actividades se describen en la Tabla 3.

Tabla 3. *Actividades diseñadas*

Núm.	Actividad	Descripción	Principales significados parciales activados	Principales registros de representaciones semióticas utilizados
Act1	Derivadas parciales y planos tangentes	Se introduce la noción de derivada parcial vinculándola con la noción previa de derivada y con la obtención de un plano tangente a una superficie.	Razón de cambio Pendiente de la recta tangente	Gráfica Simbólico
Act2	Derivadas parciales y tabulaciones	Se estudia la derivada parcial mediante el análisis de valores en tablas,	Razón de cambio	Tabular Simbólico

		incluyendo predicciones para datos no existentes		
Act3	Funciones no diferenciables y planos tangentes	Se estudian las condiciones en que una función no es diferenciable y su relación con su gráfica	Pendiente de la recta tangente Límite	Gráfico Simbólico
Act4	Derivadas direccionales	Se introduce la noción de derivada direccional mediante la obtención de una recta tangente a una superficie en un punto y con una dirección (en el dominio) dada	Pendiente de la recta tangente Razón de cambio Límite	Gráfico Simbólico

Fuente: elaborada por los autores

A continuación, se describen cada una de las actividades diseñadas para después presentar una reflexión vinculada con los criterios de idoneidad didáctica.

ACTIVIDAD 1: DERIVADAS PARCIALES Y PLANOS TANGENTES

Esta actividad aprovecha principalmente dos cosas: el referente académico previo que tienen los alumnos que vincula a la Derivada con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función y la capacidad de graficación tridimensional que tiene el software dinámico Geogebra.

El uso del software es mediante un archivo proporcionado donde se puede manipular con deslizadores un punto en representaciones gráficas de dos y tres dimensiones de una función propuesta. Así, a partir de ese punto específico, llamado $P_0(x_0,y_0)$, se plantea la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical $y = y_0$. Este plano tiene la característica de dejar "fijo" el valor de y en la función (y en la curva que surge de la intersección) y así poder estudiar la variación de la función con respecto a la otra variable independiente (x) por medio de su gráfica y de la gráfica resultante (ver Figura 1).

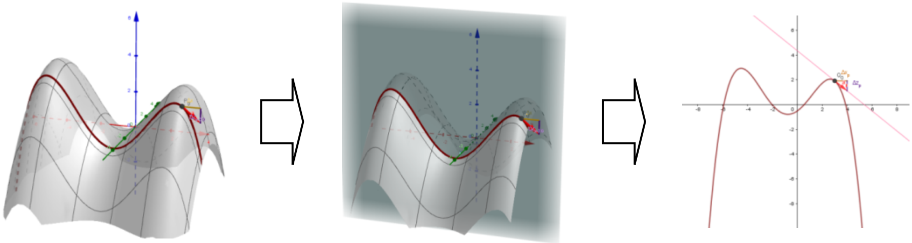


Figura 1. Obtención de la curva bidimensional a partir de la intersección de la superficie $z = f(x,y)$ y el plano $y = y_0$ para el estudio de la variación con respecto a una sola variable.
Fuente: elaborada por los autores

Para esta exploración se hace explícito el hecho de que en la gráfica bidimensional se traza la recta tangente a la curva y se obtiene el vector tangente a la misma curva, con un incremento unitario en la primera componente (x). De esta manera se puede observar que la segunda componente de ese vector (en el espacio tridimensional) es nula, ya que está fijo el cambio en esa variable, y la tercera componente corresponderá a la variación en la función, es decir a la pendiente de la recta tangente en la gráfica bidimensional.

Al pedir un análisis del comportamiento de la recta tangente graficada (también en la gráfica tridimensional) y del vector tangente correspondiente por medio de preguntas orientadas a la exploración y la observación, se espera que los alumnos vinculen los cambios en la recta tangente de la gráfica bidimensional con la variación de una variable independiente en la gráfica tridimensional, es decir, con la razón de cambio de la función.

Así se espera que al avanzar en la actividad e invertir las variables fijada-móvil (ahora serían x y y, respectivamente), el alumno pueda hacer el vínculo más fácilmente y lograr generalizar el proceso de estudio de variación de la función con respecto a cada variable. Con ello se lograría concretar la idea de derivada parcial con respecto a una variable y presentar una definición basada en la noción de límite por los requerimientos formales del curso.

La actividad aprovecha la aproximación basada en la representación gráfica, por lo que se considera como planteamiento original la obtención del plano tangente a la superficie $y = f(x,y)$ en un punto dado, que es $P_0(x_0,y_0)$. Es por ello que en la actividad se hace un tratamiento analítico (basado en Álgebra Lineal) para la obtención de la ecuación del plano tangente. La exploración permite observar la relación entre los siguientes cuatro elementos:

- los componentes de los vectores tangentes obtenidos durante la actividad,
- el cálculo de las derivadas parciales con respecto de cada una de las variables,
- la variación de la función (la razón de cambio) y
- la posición (la inclinación) del plano tangente en las direcciones paralelas a los ejes coordenados que corresponden a las variables independientes.

Es posible destacar que esto último se vincula después con la obtención de extremos de las funciones al relacionar el proceso analítico (igualar las derivadas parciales a cero de forma simultánea) con la variación nula de la función y con la representación gráfica (el plano tangente no tiene inclinación, es decir, es horizontal) al buscar los puntos críticos.

En la Figura 2 se muestra la configuración epistémica de esta actividad.

Situaciones

Obtención del plano tangente a la gráfica de una función f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante el estudio de la variación de ésta considerando las derivadas parciales.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos

Previos:
Función de dos variables (f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).
Derivada de una función de una variable.
Gráficas bidimensionales y tridimensionales de una función.
Vectores en el espacio. Ecuaciones y gráficas de planos en el espacio.

Emergentes:
Pendiente de una recta tangente a una superficie en el espacio en la dirección de alguno de los ejes coordenados del dominio de f.
Obtención del plano tangente a la gráfica de una función de dos variables en un punto dado.
Relación entre el comportamiento local de una función (variación) y la inclinación del plano tangente a su gráfica.

Propiedades/proposiciones

Un plano en el espacio queda determinado por un punto y dos vectores.
La derivada de una función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto específico.

Procedimientos

Previos:
Obtención de la función derivada de una función de una variable.
Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una curva ($\mathbb{R}^2$).
Intersección de objetos geométricos (desde el punto de vista analítico).

Emergentes:
Obtención de trayectorias como intersección de una superficie y un plano.
Cálculo de la pendiente de la recta tangente a una superficie en la dirección paralela a uno de los ejes coordenados del dominio.
Obtención del plano tangente a una superficie en un punto dado.

Justifican

Argumentos

De tipo perceptual (visual) por el uso del registro semiótico gráfico que proporciona el software dinámico.
De tipo empírico (experimental) proporcionados por los cambios dinámicos en valores y expresiones analíticas.

Lenguaje:

Algebraico:
$f(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$,
etcétera.

Gráfico-dinámico:
Gráficas dinámicas en el software tanto para objetos como de las vistas, manipulables por arrastre de los deslizadores.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Figura 2. Configuración epistémica de la actividad 1
Fuente: elaborada por los autores

ACTIVIDAD 2: DERIVADAS PARCIALES Y CON TABULACIONES

Los modelos matemáticos basados en funciones continuas resultan muy apropiados para aprovechar la definición formal de la derivada, el cual se basa en la noción de límite. Sin embargo, hay fenómenos o situaciones que consideran conjuntos numéricos discretos. Por ejemplo, consideremos el grado de deformación de una viga (hecha de algún material como el concreto y que forma parte de una construcción) con base en las medidas de su ancho, su alto y su largo. En este caso existen modelos matemáticos que utilizan funciones continuas, pero el ingeniero en su formación y en su práctica profesional no puede modificar dinámicamente una viga dada (cambiando sus medidas), sino que tendría que seleccionar las medidas óptimas para un caso particular a partir de la situación en la que se encuentre. Para ello la información a su disposición podría estar en el formato de una tabla, es decir, en el registro semiótico tabular. Así que esta actividad se aproxima a la idea de razón de cambio instantáneo utilizando representaciones tabulares de funciones y estimaciones de los valores buscados.

Así que en un primer momento se les proporciona a los alumnos dos tablas, cada una de entrada doble (los renglones corresponden a los valores de x y las columnas a los valores de y) y con incrementos regulares para cada variable independiente.

En el primer caso, la tabla proporcionada (Tabla 4) no tiene el valor de la función correspondiente a los valores (0,0) y se les pide a los alumnos que estimen la variación de la función a partir de los valores proporcionados y con el uso de las razones de cambio promedio.

Tabla 4. *Primera tabla de la actividad proporcionada a los alumnos*

						y					
		–2.0	–1.6	–1.2	–0.8	–0.4	0.0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
	–2.0	0.0000	0.2195	0.4706	0.7241	0.9231	1.0000	0.9231	0.7241	0.4706	0.2195	0.0000
	–1.6	–0.2195	0.0000	0.2800	0.6000	0.8824	1.0000	0.8824	0.6000	0.2800	0.0000	–0.2195
	–1.2	–0.4706	–0.2800	0.0000	0.3846	0.8000	1.0000	0.8000	0.3846	0.0000	–0.2800	–0.4706
	–0.8	–0.7241	–0.6000	–0.3846	0.0000	0.6000	1.0000	0.6000	0.0000	–0.3846	–0.6000	–0.7241
	–0.4	–0.9231	–0.8824	–0.8000	–0.6000	0.0000	1.0000	0.0000	–0.6000	–0.8000	–0.8824	–0.9231
x	0.0	–1.0000	–1.0000	–1.0000	–1.0000	–1.0000		–1.0000	–1.0000	–1.0000	–1.0000	–1.0000
	0.4	–0.9231	–0.8824	–0.8000	–0.6000	0.0000	1.0000	0.0000	–0.6000	–0.8000	–0.8824	–0.9231
	0.8	–0.7241	–0.6000	–0.3846	0.0000	0.6000	1.0000	0.6000	0.0000	–0.3846	–0.6000	–0.7241
	1.2	–0.4706	–0.2800	0.0000	0.3846	0.8000	1.0000	0.8000	0.3846	0.0000	–0.2800	–0.4706
	1.6	–0.2195	0.0000	0.2800	0.6000	0.8824	1.0000	0.8824	0.6000	0.2800	0.0000	–0.2195
	2.0	0.0000	0.2195	0.4706	0.7241	0.9231	1.0000	0.9231	0.7241	0.4706	0.2195	0.0000

Fuente: elaborada por los autores

Junto con la segunda tabla que se les proporciona a los alumnos (Tabla 5), se les pide no sólo que estimen la razón de cambio de la función para valores de las variables independientes que aparecen en la tabla, sino para valores de las variables independientes que no aparecen explicitados en la tabla.

Tabla 5. *Segunda tabla de la actividad proporcionada a los alumnos*

							y					
		–2.0	–1.7	–1.4	–1.1	–0.7	–0.4	0.3	0.7	1.0	1.6	2.0
	–2.0	0.1237	0.0828	–0.0533	–0.1687	–0.2172	–0.2046	–0.1987	–0.2172	–0.1918	0.0417	0.1237
	–1.7	0.0828	–0.0834	–0.2042	–0.1996	–0.0699	0.0300	0.0540	–0.0699	–0.1749	–0.1358	0.0828
	–1.3	–0.0982	–0.2164	–0.1334	0.0825	0.3762	0.5196	0.5495	0.3762	0.1622	–0.2106	–0.0982
	–0.9	–0.2069	–0.1432	0.1311	0.4459	0.7412	0.8504	0.8704	0.7412	0.5368	–0.0672	–0.2069
	–0.6	–0.2153	–0.0333	0.3156	0.6369	0.8839	0.9555	0.9666	0.8839	0.7190	0.0753	–0.2153
x	–0.1	–0.1903	0.0825	0.4677	0.7698	0.9589	0.9952	0.9983	0.9589	0.8384	0.2105	–0.1903
	0.2	–0.1936	0.0717	0.4546	0.7592	0.9538	0.9933	0.9972	0.9538	0.8292	0.1983	–0.1936
	0.9	–0.2069	–0.1432	0.1311	0.4459	0.7412	0.8504	0.8704	0.7412	0.5368	–0.0672	–0.2069
	1.2	–0.1373	–0.2143	–0.0752	0.1781	0.4851	0.6247	0.6531	0.4851	0.2645	–0.1892	–0.1373
	1.6	0.0417	–0.1358	–0.2172	–0.1559	0.0300	0.1504	0.1781	0.0300	–0.1141	–0.1793	0.0417
	2.0	0.1237	0.0828	–0.0533	–0.1687	–0.2172	–0.2046	–0.1987	–0.2172	–0.1918	0.0417	0.1237

Fuente: elaborada por los autores

Para ello las consignas incluyen el aproximar la razón instantánea de cambio de la función con respecto a x y a y para casos como (–0.9, –1.1) y (1.5, –1.5), considerando todo el proceso realizado. Así se busca que la noción de razón de cambio promedio lleve al desarrollo de la noción de razón de cambio instantáneo utilizando, entre otras cosas, extrapolaciones.

Además, se trata de aprovechar la idea de "movimiento" de una celda a otra de la tabla (ver la Figura 3) tomando en cuenta la siguiente consigna:

"A partir de una casilla (x,y) se puede uno 'mover' en ocho direcciones como en la figura (observa que las derivadas parciales, tal como se han visto hasta ahora, sólo consideran los movimientos en las flechas de color rojo):

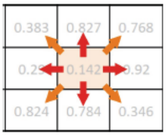


Figura 3. Extracto de la actividad donde se explicita la relación entre el “movimiento” entre las celdas de una tabla con valores de una función y la variación que proporcionan las derivadas parciales
Fuente: elaborada por los autores

Y se continúa con la consigna: “Al considerar una casilla cualquiera de la tabla, ¿puedes determinar cuál de las dos variables afectan (en términos absolutos) más en la variación de la función? ¿Por qué sí o por qué no?”

Así, con estas exploraciones, se busca determinar cuál variable es la que tiene mayor influencia en los cambios de la función y así vincularlo con la “dirección” en la que existe una mayor variación de la función, una menor variación y una variación nula. Todo tratando de vincularlo con las derivadas parciales como razón de cambio instantáneo que se aproximó con razones de cambio promedio. Este estudio está orientado a que se vincule posteriormente con conceptos como el gradiente y la derivada direccional aprovechando una aproximación visual mediante tablas y no sólo de gráficas tridimensionales o bidimensionales.

En la Figura 4 aparece la configuración epistémica de esta actividad.

Lenguaje:

Tabular:
Se presentan los valores de las funciones como tablas de doble entrada (para dos variables independientes).

Coloquial:
Las indicaciones y descripciones están en su mayoría con este lenguaje.

Numérico:
Los datos para los cálculos se proporcionan de manera numérica.

Situaciones

Identificar la razón de cambio instantáneo (aproximar su valor y hallar las condiciones en que se mantiene nula) de una función de dos variables a partir de información tabular.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos

Previos:
Función de dos variables ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$).
Razón de cambio promedio e instantáneo con respecto a una variable.
Interpretación de la información presentada en tablas.
Emergentes:
Razón de cambio promedio e instantáneo con respecto a más de una variable.
Variación mayor, menor y nula de una función.

Expresa y soporta

Propiedades/proposiciones

Una función continua puede representarse de manera discreta en el registro semiótico tabular.

Regulan el uso

Procedimientos

Previos:
Cálculo de la razón de cambio promedio e instantáneo con respecto a una variable.
Interpolación de valores.
Emergentes:
Cálculo de la razón de cambio promedio e instantáneo con respecto a más de una variable.
Identificación del grado de influencia de cada variable en la variación de la función.

Justifican

Argumentos

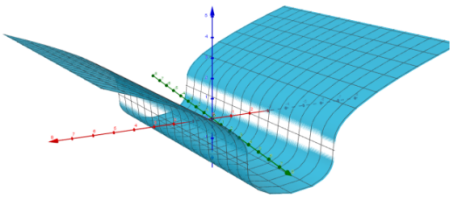
De tipo empírico proporcionado por los cálculos realizados con la información tabular.

Figura 4. Configuración epistémica de la actividad 2
Fuente: elaborada por los autores

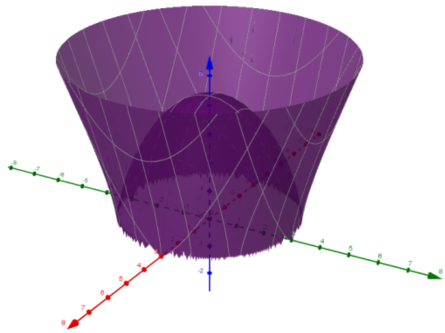
ACTIVIDAD 3: FUNCIONES NO DIFERENCIABLES Y PLANOS TANGENTES

Una vez que se define formalmente la Derivada parcial de una función, es común que en los ejercicios y en los ejemplos de los cursos se utilicen funciones diferenciables, sin hacer énfasis en los casos en que no ocurre así. En esta actividad se hace la exploración de casos en los que una función es continua, pero no es diferenciable en todo su dominio con una aproximación gráfica y dinámica aprovechando Geogebra.

Después de enunciar a los alumnos la condición para que una función de varias variables sea diferenciable se les proporcionan dos funciones de dos variables, y que son continuas en todo su dominio, para que aprovechando el software obtengan y manipulen sus representaciones gráficas y algebraicas a fin de que observen propiedades (ver la Figura 5).



$$f(x,y)=\frac{1}{10}y+\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{3}}$$



$$g(x,y)=\left(x^2+y^2-9\right)^{\frac{2}{3}}$$

Figura 5. Gráficas de las funciones proporcionadas a los alumnos
Fuente: elaborada por los autores

En cada uno de los casos se les pide a los alumnos que grafiquen las funciones en Geogebra y determinen si son continuas o tienen discontinuidades en su dominio. Además, tienen que obtener analíticamente sus derivadas parciales y determinar con base en la información disponible las posibles discontinuidades de las derivadas parciales. Así se establece un vínculo experimental entre la obtención de las derivadas parciales y la cualidad de ser diferenciable de la función original.

Ahora bien, se puede observar que en la función f existen puntos donde la derivada parcial con respecto a una variable (x) no está definida, aunque respecto a la otra variable (y) sí está definida. En otras palabras, la derivada parcial con respecto a y, es decir $\frac{\partial f}{\partial y}$, es continua en todo su dominio, mientras que la derivada parcial con respecto a x, es decir $\frac{\partial f}{\partial x}$, tiene discontinuidades.

Por otro lado, la función g tiene como característica de que en todos los puntos del dominio en los que la derivada parcial con respecto a x, es decir

$\frac{\partial f}{\partial x}$, es discontinua, también ocurre lo mismo para el caso de la otra derivada parcial, es decir para el caso de $\frac{\partial f}{\partial y}$. Así se hace énfasis de que es necesario tener ambas derivadas parciales para hablar de que la función original es diferenciable.

Con la exploración gráfica de estos casos se puede vincular una vez más la relación de las derivadas parciales con los planos tangentes (y su inclinación) al solicitar a los alumnos que identifiquen si es posible que las superficies graficadas tengan planos tangentes en los puntos en que no son diferenciables. Se puede observar que para el caso de la primera función sí es posible obtener planos tangentes en esos puntos, pero no utilizando las derivadas parciales, sino utilizando una aproximación geométrica. En cambio, en la segunda función se complica la situación y no se pueden obtener los posibles planos tangentes.

En la aparece Figura 6 la configuración epistémica de esta actividad.

Situaciones

Identificar, por medio de la gráfica de una función, las condiciones en que la función es o no diferenciable.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos

Previos:

Función de dos variables (f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$). Dominio, imagen y continuidad de una función.

Derivada parcial de una función de dos variables y razón de cambio instantáneo con respecto a una variable.

Plano tangente a una gráfica tridimensional y pendiente de una recta tangente a una curva.

Emergentes:

Continuidad y discontinuidad de la función derivada parcial de una función de dos variables.

Funciones de dos variables diferenciables.

Propiedades/proposiciones

Las derivadas parciales en un punto, como razones de cambio de la función, se vinculan con la inclinación del plano tangente a la gráfica de la función en ese punto.

Si el plano tangente a la gráfica de una función en un punto es vertical, la derivada parcial de la función no está definida, por lo que la función no es diferenciable en el valor correspondiente del dominio.

Si la gráfica de una función no es "suave" (tiene cambios "abruptos" o "picos") no se puede determinar la posición de un plano tangente a la gráfica y la derivada parcial no está definida, por lo que la función no es diferenciable.

Relación entre la discontinuidad en un punto, la no existencia de la función derivada parcial, la posición del plano tangente y la posibilidad de determinar el plano tangente a la gráfica de la función.

Procedimientos

Previos:

Obtención de la derivada parcial con respecto a una variable.

Construcción con el software de la gráfica de una función de dos variables y del plano tangente a la gráfica.

Emergentes:

Identificación de la inclinación del plano tangente a la gráfica de una función.

Relación entre la inclinación y características del plano tangente a la gráfica de una función con la existencia de las derivadas parciales (la característica de una función diferenciable).

Justifican

Argumentos

De tipo perceptual (visual) por el uso del registro semiótico gráfico que proporciona el software dinámico.

De tipo empírico (experimental) proporcionados por los cambios dinámicos en valores y expresiones analíticas.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Lenguaje:

Algebraico: $f(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, etcétera.

Gráfico-dinámico: Gráficas dinámicas en el software de las funciones y de los planos tangentes que son manipulables.

Figura 6. Configuración epistémica de la actividad 3

Fuente: elaborada por los autores

Es importante mencionar que al utilizar el software como se les propone a los alumnos es posible que grafiquen las derivadas parciales como funciones de dos variables. Este procedimiento, de hecho, involucra un concepto y un proceso previos mencionados en la configuración epistémica, aunque de manera independiente entre sí, es decir, se requiere conocer la existencia de las funciones de dos variables y se requiere poder graficarlas en el software, pero al graficar con el software las derivadas parciales se tiene una imagen que puede resultar inútil e incluso confusa para el estudiante (ver la Figura 7). Si se quisiese interpretar esta gráfica se tendría que hacer un trabajo didáctico específico y ello conlleva una complejidad adicional.

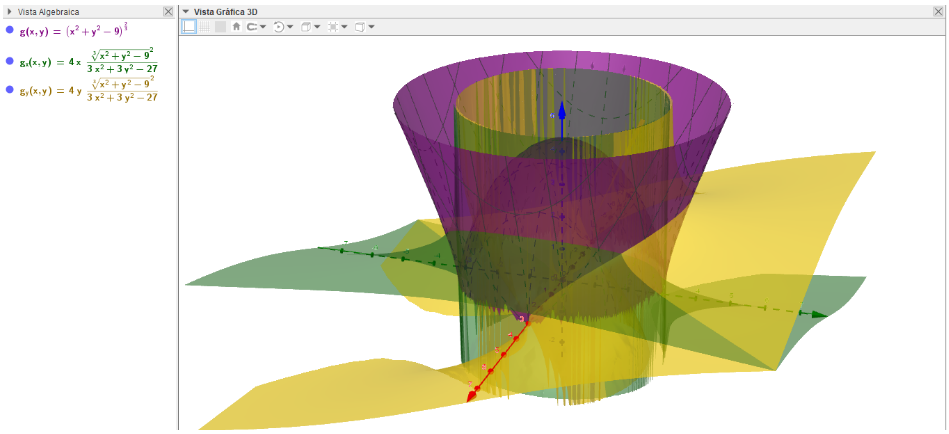


Figura 7. Gráficas de la función $g(x,y)$ y de sus dos derivadas parciales
Fuente: elaborada por los autores

ACTIVIDAD 4: DERIVADAS DIRECCIONALES

Para esta actividad se plantea una situación que requiere la obtención de una recta tangente a una superficie definida por una función de dos variables, en un punto dado y con una dirección dada por un vector de dirección (unitario y perteneciente al dominio de la función). Con esto se pretende recuperar las nociones abordadas en las actividades previas y, además, se incluyen otros objetos y propiedades (como la denominada "regla de la cadena"), junto con el uso de las diferentes formas de representación utilizadas, por lo que su complejidad cognitiva es mayor que las anteriores.

Así pues, de inicio se plantea la situación a abordar, por lo que se proporciona una función f y se les pide a los alumnos que obtengan las dos derivadas parciales por procedimientos analíticos. Con ello se espera vincular a la derivada de una función (vinculada con f), como razón instantánea de cambio, con la pendiente de la recta tangente que se buscará, como razón de cambio de ésta. Por tanto, se propone un punto y un vector de dirección (unitario) para el trabajo a realizar, y se les pide a los alumnos que propongan y describan en lenguaje coloquial sus estrategias para obtener la pendiente de la recta tangente.

En una acción que vincula esta actividad con lo realizado en la primera, se propone obtener la traza de la función considerando un plano vertical que pasa por el punto dado y que es paralelo al vector de dirección propuesto. Esto permite utilizar el registro semiótico gráfico para ilustrar el proceso analítico (ver Figura 8).

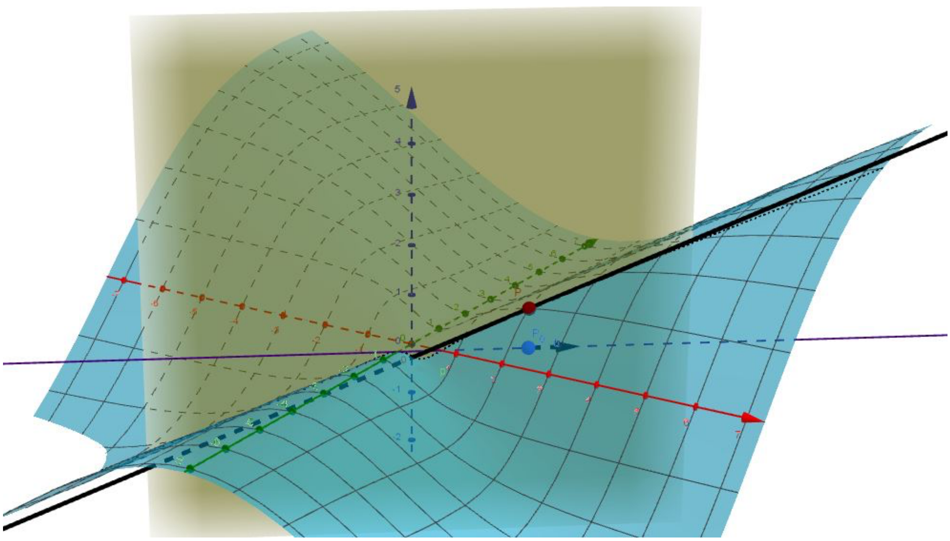


Figura 8. Gráfica de la función $f(x,y)$ y de los elementos utilizados durante la actividad (el punto dado está coloreado en rojo, el vector de dirección se encuentra debajo de éste, la trayectoria rectilínea está coloreada en violeta, la traza de la función aparece negra punteada y la recta tangente es negra con trazo continuo)
Fuente: elaborada por los autores

Se puede tener una trayectoria rectilínea como función vectorial que indica la dirección en la que se obtendrá la razón instantánea de cambio de la función (que será la pendiente de la recta tangente buscada). Con esto es posible considerar la regla de la cadena y el gradiente a de la función para establecer qué tanto varía la función en la dirección de esa trayectoria rectilínea y así vincular el proceso realizado con la definición de la derivada direccional de la función para el punto dado y en la dirección proporcionada por el vector unitario de dirección.

Se espera que los alumnos logren, en cierto grado, realizar la conversión entre los registros gráficos y analíticos a fin de que puedan establecer un vínculo entre el proceso analítico (registro algebraico) y lo mostrado en la gráfica.

En la Figura 9 aparece la configuración epistémica de esta actividad.

Lenguaje:

Algebraico:
$f(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$,
$D_u f(x,y)$, etcétera.

Gráfico-dinámico:
Gráficas dinámicas en el software de la función, el vector de dirección, el plano vertical, la traza de la función (la trayectoria en el espacio y la recta tangente), que son manipulables.

Expresa y soporta

Regulan el uso

Situaciones

Obtener la recta tangente a la gráfica de una función de dos variables (una superficie tridimensional) en un punto y una dirección dados, así como vincularlo con la definición y cálculo de la derivada direccional de la función.

Motivan

Resuelven

Definiciones/conceptos

Previos:
Función de dos variables (f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).
Derivada parcial de una función de dos variables y razón de cambio instantáneo con respecto a una variable. Gradiente de la función de dos variables.
Recta tangente a una curva y su pendiente.
Traza de una función de dos variables con respecto a un plano vertical, como trayectoria en el espacio y expresada como función vectorial. Vector de dirección unitario.
Emergentes:
Recta tangente a una superficie en un punto dado y en una dirección dada.
Derivada direccional de una función de dos variables.

Propiedades/proposiciones

La derivada de una función de una variable es la pendiente de la recta tangente en el punto evaluado.
La derivada proporciona la razón instantánea de cambio de una función y el comportamiento (variación) de la misma.
Si una función vectorial modela una trayectoria en el espacio su derivada determina la dirección del movimiento sobre la trayectoria para un momento dado.

Procedimientos

Previos (software):
Graficar una función de dos variables.
Obtención de la traza vertical de una gráfica de una función de dos variables a partir de un punto y un vector de dirección.
Previos (matemáticos):
Obtención de una trayectoria, como función vectorial, que sea la traza vertical de una gráfica de una función de dos variables a partir de un punto y un vector de dirección por medio de procedimientos analíticos.
Emergentes (matemáticos):
Cálculo de la derivada direccional de una función de dos variables a partir de un punto y en una dirección dada por un vector unitario.

Justifican

Argumentos

De tipo perceptual (visual) por el uso del registro semiótico gráfico que proporciona el software dinámico.
De tipo empírico (experimental) proporcionados por los cambios dinámicos en valores y expresiones analíticas.
De tipo analítico por el uso de las expresiones en el registro algebraico que provienen de las definiciones, las propiedades y los procedimientos previos y emergentes.

Figura 9. Configuración epistémica de la actividad 5
Fuente: elaborada por los autores

Comentarios con base en los criterios de idoneidad

A partir del diseño presentado y considerando los criterios de idoneidad, en esta sección se presentan reflexiones al respecto, organizadas en las facetas propuestas por el EOS. Ahora bien, hay que decir que se han tomado en cuenta dos cosas: en primer lugar, lo que se presenta es una evaluación a priori de las actividades diseñadas y, en segundo lugar, por el momento del diseño y las condiciones se presentan principalmente lo que corresponde a las facetas epistémica, cognitiva y mediacional.

Idoneidad epistémica

En cuanto a la idoneidad epistémica, se han considerado situaciones contextualizadas de acuerdo a antecedentes académicos de los alumnos. Como se ha mencionado, este diseño está orientado para un curso que tiene como antecedentes los cursos de Cálculo Diferencial e Integral, ya en la carrera, y en trabajos previos se han realizado indagaciones sobre los significados que tienen los alumnos sobre la Derivada [2,3,5]. Así pues, los objetos primarios que están implicados en el diseño toman en cuenta el contexto matemático del curso en términos comprensibles para los estudiantes.

Además, y como ya se mencionó antes, existen propuestas como las de Arcos [20,21] que señalan el uso de cantidades infinitamente pequeñas como una manera de abordar el estudio del Cálculo que se corresponde con la intuición y las aproximaciones físicas para el estudio de fenómenos en la Ingeniería. Esto se ha pretendido lograr al utilizar representaciones tabulares y mediante el manejo de deslizadores en los archivos del software dinámico, las cuales son representaciones que implican incrementos que podrían considerarse cada vez más pequeños. Se busca hacia el final de la serie de actividades relacionar diferentes significados parciales del objeto Derivada que se vinculen más que nada con la noción de razón de cambio y de pendiente de una recta tangente, junto con la de límite, mediante la manipulación de intervalos y de representaciones en los registros gráfico, tabular y algebraico.

A lo largo de las actividades se busca realizar diversos procesos involucrados en las prácticas matemáticas. El software dinámico permite realizar exploraciones que permiten hallar regularidades tendientes a generalizaciones. Estos procesos de generalización quedan plasmados en respuestas que los alumnos proporcionan de manera argumentada, con respuesta de tipo “ensayo” en la plataforma informática. Asimismo, el uso de diversos registros semióticos permite a los estudiantes ahondar en las representaciones de los objetos matemáticos de diferentes maneras.

IDONEIDAD COGNITIVA

En cuanto a la idoneidad cognitiva, como se mencionó antes, se tienen indagaciones con estudiantes sobre los significados y la enseñanza de la derivada en un momento previo al inicio del curso [2]. En este reporte se obtuvo que el significado parcial predominante de los alumnos sobre la Derivada está vinculado con la idea de la pendiente de la recta tangente a la curva (gráfica de la función) y aparece de manera reiterada en diferentes tipos de actividades planteadas, aunque el significado vinculado con la idea de razón de cambio está presente de manera significativa. Además, se reporta que los alumnos suponen que las funciones son más que nada continuas y buscan plantear representaciones algebraicas (aunque no se provean y se tengan que adivinar) para utilizar procedimientos analíticos, lo cual quizá se debe a que la información en los registros gráfico y tabular puede no ser clara o comprensible para ellos.

Con base en lo anterior, las actividades diseñadas consideran de inicio el significado parcial de la Derivada vinculado, precisamente, con la pendiente de una recta tangente a la curva de la función y a partir de ahí introducirse al estudio de la derivada parcial con su equivalente: el plano tangente a la gráfica de la función de dos variables. Ello permite que ese significado parcial se relacione con el de razón de cambio, en particular en la segunda actividad que considera la representación tabular de relaciones funcionales no continuas, las cuales son una forma de representación con la que se encuentra el individuo en su desarrollo profesional como ingeniero. Así, junto con la información de definiciones y el uso de propiedades previas (del mismo o de otros cursos) se integran varios significados parciales para llevar al objeto más complejo: la derivada direccional.

Ahora bien, un caso potencialmente conflictivo que se detectó durante el diseño de las actividades fue sobre la utilidad de la representación gráfica de la derivada parcial para decidir sobre propiedades de la función proporcionada, como se ha mencionado antes en la actividad 3. Es importante señalar que no es el único momento en que podría ocurrir esta situación en la serie de actividades, pero si el alumno identifica a la función Derivada con principalmente con su gráfica entonces estaría obteniendo información adicional y confusa, por lo que la intervención del profesor se vuelve importante para realizar procesos de transformación de un registro semiótico a otro (en este caso del gráfico al algebraico) de una manera reflexiva a fin de que el alumno pueda utilizar el proceso que le sea más significativo dependiendo de la situación.

IDONEIDAD DE OTRAS FACETAS

Como se mencionó al inicio de este trabajo, el diseño realizado se ha llevado a cabo durante el periodo de distanciamiento social que se produjo por la pandemia de la Covid-19 y en el caso particular de la institución en la que se desarrolló tuvo como consecuencia la migración de las clases a una modalidad a distancia en un contexto de excepcionalidad [23]. Esta situación afectó con seriedad la dinámica de las clases y la faceta interaccional (del profesor con los alumnos y de los alumnos entre sí), aunque fue impuesta por las condiciones imperantes.

Se aprovechó el recurso informático en la institución y se utilizó el software de gestión de aprendizaje denominado Moodle, el cual tiene opciones para crear lecciones, cuestionarios y foros (entre otros recursos) para que los alumnos accedan ellos, realicen actividades, interactúen entre sí y con el profesor, envíen sus actividades y reciban retroalimentación. Esta plataforma informática, junto con el uso del software dinámico Geogebra, permite que los alumnos puedan llevar a cabo de manera autónoma sus actividades que incluyen exploraciones e investigaciones, proporcionando un medio que, por su capacidad, produce representaciones gráficas tridimensionales de funciones de dos variables que pueden ser manipuladas.

Por otro lado, una situación que se debe considerar, y que no es exclusiva del software utilizado en esta ocasión, es la dificultad del software para graficar puntos donde una función tiene discontinuidades o es continua pero no diferenciable (ver, por ejemplo, las gráficas de las funciones de la Figura 5 y las gráficas de las derivadas parciales de una de ellas que aparecen en la Figura 7). En estos casos, el alumno además de tener que discriminar la información gráfica que proporciona en términos de su utilidad (como ya se mencionó en la subsección anterior), debe estar atento a los errores o falta de información por las limitaciones técnicas de las computadoras que tienen monitores finitos y que, en la realidad, funcionan con números racionales con aproximaciones.

COMENTARIOS FINALES

En este trabajo se ha presentado un diseño de actividades para el estudio de la derivada parcial de funciones de dos variables y que se ha realizado en condiciones de excepcionalidad como consecuencia de una situación epidemiológica. Sin embargo, la intención es continuar con el uso de estas actividades después de que se haga un análisis de la aplicación con alumnos e indagar sobre los significados que construyan al respecto.

Como se mencionó desde el principio, el interés se centró en buena medida en una reflexión sobre un análisis a priori a partir de la noción de idoneidad didáctica para determinar, de antemano, sus características y prever situaciones en la práctica educativa directa en las aulas.

En esta reflexión se ha mostrado la existencia de diversos significados parciales de la derivada de una función y, atendiendo los criterios de idoneidad, la necesidad de considerarlos en el proceso de enseñanza. En este punto la intervención del profesor es relevante ya que uno de los principales recursos didácticos que se tienen como guía en las aulas siguen siendo los libros de texto [24] y éstos, en buena medida, dan una preponderancia al último significado parcial desarrollado en la historia y que es, al mismo tiempo, el más complejo de entender.

Además, el uso de la tecnología digital ayuda a cubrir los aspectos relacionados con los aspectos mediacionales e interaccionales, pues aunque proporciona medios para que los alumnos realicen un trabajo autónomo con un software que permite graficar y explorar posibilidades dadas sus capacidades dinámicas y de cálculo, también permite que se comuniquen entre ellos y con el profesor a pesar de las condiciones que pueden seguir imperando.

Ahora bien, la última de las actividades se centra en la derivada direccional de una función de varias variables. Este objeto matemático tiene una complejidad mayor que los anteriores por los objetos que lo componen, sus relaciones y sus representaciones. Se esperaría que los recursos educativos utilizados puedan ayudar a los estudiantes a construir significados apropiados, pero es algo que que se debe investigar y diseñar.

Hay que decir que en estas actividades falta considerar el significado parcial vinculado con la obtención de máximos y mínimos de una función, lo cual puede vincularse de forma directa no sólo con el concepto en sí de derivada parcial, sino también con los planos tangentes a la gráfica de la función con la característica de ser horizontales, la razón instantánea de cambio nula y el gradiente nulo de la función.

Es cierto que, nuestra finalidad no es solo presentar un diseño de actividades y considerar su aplicación en el aula, sino aparejarlo con un proceso de investigación como un proceso en el que la relación téorico-práctico en lo educativo nutre a ambas partes de forma simultánea, tal como mucha de la literatura actual en Educación Matemática lo presenta y muestra que se necesita (ver, por ejemplo, [6,9]).

Reconocimientos

Este trabajo se llevó a cabo como parte del proyecto FIN202015 (Fondo para el Desarrollo del Conocimiento de la Universidad Autónoma de Querétaro, 2019).

Referencias

1. Cuevas Salazar O, Larios Osorio V, Peralta JX, Jiménez Sánchez AR. Mathematical knowledge of students who aspire to enroll in engineering programs. International Electronic Journal of Mathematics Education. 2018; 13(3): 161-169. https://doi.org/10.12973/iejme/3832
2. Larios Osorio V, Páez Murillo RE, Jiménez Sánchez AR. Significados de la derivada para alumnos de ingeniería. En: Valbuena S, Vargas L, Berrio JD, editores. Memorias del 5.o Encuentro Internacional de Investigación en Educación Matemática. Barranquilla: Universidad del Atlántico; 2020. pp. 414-419.
3. Larios Osorio V, Páez Murillo RE, Moreno Reyes H. Significados sobre la derivada evidenciados por alumnos de carreras de Ingeniería en una universidad mexicana. Avances de Investigación en Educación Matemática. 2021; (20): 105–124. https://doi.org/10.35763/aiem20.4002
4. Pino-Fan LR, Font V, Gordillo W, Larios Osorio V, Breda A. Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. International Journal of Science and Mathematics Education. 2018; 16(6): 1091–1113. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2
5. Larios Osorio V, Jiménez Sánchez AR. El estudio del cálculo multivariable en la formación de ingenieros medidado por software gráfico y algebraico. En: Sales A, Martins Stein NR, editores. Trabalho didático: Trajetórias de pesquisas. Campo Grande: Life Editora; 2017. pp. 53-76.
6. García FJ. Introducción a 'Diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos'. Avances de Investigación en Educación Matemática. 2019; 15: 1-4. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.264
7. Godino JD, Batanero Bernabeu C, Font Moll V. The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education. 2007; 39(1-2): 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

8. Godino JD, Batanero Bernabeu C, Font Moll V. The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. For the Learning of Mathematics. 2019; 39(1): 37-42. https://flm-journal.org/Articles/7BF8C2BCB810897D52601E7BD7A1A7.pdf
9. Godino JD, Batanero Bernabeu C, Burgos M, Gea MM. Una perspectiva onto-semiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. Revemop. 2021; 3: e202107. https://doi.org/10.33532/revemop.e202107
10. Breda A, Font Moll V, Pino-Fan LR. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. Bolema. 2018; 32(60): 255-278. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13
11. Godino JD, Bencomo D, Font Moll V, Wilhelmi MR. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma. 2006; XXVII(2): 221-252. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2006.p221-252.id369
12. Godino JD. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2013; 8(11): 111-132. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720
13. Breda A, Lima VMdR. Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. Redimat - Journal of Reserch in Mathematics Education. 2016; 5(1): 74-103. https://doi.org/10.4471/redimat.2016.1995
14. Bell ET. Historia de las matemáticas. México: Fondo de Cultura Económica; 1995.
15. Boyer CB. The history of the calculus and its conceptual development. Nueva York: Dover Publications; 1959.
16. Courant R, Robbins H, Stewart I. ¿Qué son las matemáticas? México: Fondo de Cultura Económica; 2002.
17. Kline M. Matemáticas para los estudiantes de humanidades. México: Fondo de Cultura Económica; 1992.
18. Godino JD, Batanero Bernabeu C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques. 1994; 14(3): 325-355. https://revue-rdm.com/1994/significado-institucional-y/
19. Pino-Fan LR, Godino JD, Font Moll V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. Educação Matematica Pesquisa. 2011; 13(1): 141-178. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4423

20. Arcos Quezada JI, Sepúlveda López A. Desarrollo conceptual del cálculo. Desarrollo histórico de los conceptos del cálculo: Una perspectiva docente. Toluca: Universidad Autónoma del Estado de México; 2014.
21. Arcos Quezada JI. Una presentación de los conceptos del cálculo, en escuelas de ingeniería, no centrada en la definición de límite. El Cálculo y su Enseñanza. 2019; 12: 46-59. https://doi.org/10.61174/recacym.v12i1.33
22. Rojas Flórez LC, Mejía Velasco HR, Esteban Duarte PV. Conceptualización de la derivada direccional a partir de la pendiente de una recta en el espacio. El Cálculo y su Enseñanza. 2019; 12: 13-26. https://doi.org/10.61174/recacym.v12i1.31
23. Rodríguez M. Youtube. [Online]. 2020 mayo 21. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=hKkrYk9kSB0
24. Pino-Fan LR, Castro WF, Godino JD, Font Moll V. Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. Paradigma. 2013; 34(2): 123-150. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2013.p123-150.id522
25. Godino JD, Giacomone B, Batanero Bernabeu C, Font Moll V. Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. Bolema. 2017; 31(57): 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05