RIME
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

ISSN 2810-7187
Nº1
volumen 1 - 2024

DOI: https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013065

MANERAS DE GENERALIZAR PATRONES LINEALES POR NIÑOS DE QUINTO GRADO

WAYS OF GENERALIZING LINEAR PATTERNS BY FIFTH GRADE CHILDREN

MANEIRAS DE GENERALIZAR PADRÕES LINEARES POR CRIANÇAS DA QUINTA SÉRIE

Walter F. Castro [1] • Juan S. Cuartas-Carmona[2]

Recibido: Ago/09/2023 • Aceptado: Sep/13/2023 • Publicado: Mar/10/2024

RESUMEN

Este trabajo ofrece evidencia sobre los procesos de generalización exhibidos por niños de quinto grado. La generalización versa sobre patrones lineales a partir de secuencias pictóricas que favorece que los estudiantes propongan sus propias maneras de generalización que dan cuenta de las diversas configuraciones que identifican. Las secuencias pictóricas fueron diseñadas con base en la literatura y se dieron individualmente a los estudiantes para su discusión. Las generalizaciones realizadas por los estudiantes fueron agrupadas en cinco categorías: Reconocimiento de una base, Desconfiguración, Relación numérico-figural, Verificación del cumplimiento de la regla de formación, Cierre de configuraciones, Reversibilidad en la generalización. Los resultados muestran las formas no estándar en las cuales los estudiantes generalizan.

Palabras clave: álgebra temprana; generalización; patrones; secuencias pictóricas; configuración.

[1] Universidad de Antioquia, Colombia; Facultad de Educación; walter.castro@udea.edu.co; https://orcid.org/0000-0002-7890-681X

[2] Colegio Institución Educativa de Desarrollo Rural Miguel Valencia, Colombia; sebastian.cuartas@udea.edu.co; https://orcid.org/0009-0003-6051-082X

Abstract

This work offers evidence about the generalization processes exhibited by fifth grade children. Generalization deals with linear patterns from pictorial sequences that encourage students to propose their own ways of generalizing that account for the various configurations they identify. The pictorial sequences were designed based on the literature and were given individually to the students for discussion. The generalizations made by the students were grouped into five categories. The results show the non-standard ways in which students generalize.

Keywords: early algebra; generalization; patterns; pictorial sequences; configuration.

Resumo

Este trabalho oferece evidências sobre os processos de generalização apresentados por crianças da quinta série. A generalização trata de padrões lineares a partir de sequências pictóricas que incentivam os alunos a propor suas próprias formas de generalizar que dão conta das diversas configurações que identificam. As sequências pictóricas foram elaboradas com base na literatura e entregues individualmente aos alunos para discussão. As generalizações feitas pelos alunos foram agrupadas em cinco categorias. Os resultados mostram as maneiras não padronizadas pelas quais os alunos generalizam.

Palavras-chave: álgebra inicial; generalização; padrões; sequências pictóricas; configuração.

Introducción

De acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [1] los estudiantes inician el desarrollo del razonamiento matemático en los primeros grados mediante actividades que les permiten percibir regularidades y relaciones; predecir y conjeturar; explicar coherentemente; proponer interpretaciones y respuestas, con la posibilidad de aceptarlas o rechazarlas.

Al culminar el grado quinto los estudiantes deben justificar regularidades y propiedades de los números, así como establecer relaciones y operaciones entre números. El estudiante debe interpretar y describir representaciones gráficas que presentan variaciones, representar y relacionar patrones numéricos con tablas [2] y reglas verbales a partir de secuencias pictóricas [1,3].

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia [4], afirman que el razonamiento matemático se vincula con la identificación y representación de patrones, [1] y [4] enfatizan la importancia de la generalización a partir de la identificación de patrones; sin embargo, las declaraciones son amplias y no ofrecen posibles rutas para trabajar generalizaciones a partir de identificación de patrones.

El Consejo Nacional de profesores de Matemáticas, de los Estados Unidos -NCTM- [5] propone que en los primeros grados escolares los estudiantes deben identificar o construir patrones numéricos y geométricos, describir verbalmente patrones, establecer relaciones entre cantidades para proponer conjeturas, explicar generalizaciones vistas en casos particulares, explorar propiedades de los números y expresar generalidad a partir de símbolos convencionales.

Problema de investigación

La NCTM [5] trasciende la identificación de patrones al proponer que los estudiantes deben expresar y explicar generalizaciones producidas por ellos mismos, desde los primeros grados.

El problema descrito sugiere la siguiente pregunta: ¿Cómo generalizan patrones lineales, a partir de secuencias pictóricas, niños de quinto grado? El objetivo refiere a “analizar maneras de generalizar patrones lineales a partir de secuencias pictóricas por niños de quinto grado”; este objetivo se traduce, metodológicamente en “Identificar categorías para analizar las maneras de generalizar de estudiantes de 5º grado”.

Se debe mencionar que tanto en la pregunta como en el objetivo se pretende indagar por las maneras, las cuales se entienden en esta investigación como las “formas de hacer”, en las cuales se pretende indagar por el conocimiento procedimental de cada niño. El conocimiento procedimental se entiende como un conjunto de acciones que “[…] se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente” [1] (p. 50). En esta investigación, tales acciones son respuestas escritas y verbales producidas por cada niño.

Marco teórico

La Early-Algebra, como una propuesta para abordar el problema descrito, está basada en la introducción del álgebra, de manera transversal, gradual y sistemática, en todos los grados de escolaridad. Esta propuesta es vista como una forma de pensamiento y expresión a partir de objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, con la finalidad de promover una enseñanza y un aprendizaje para la comprensión y facilitar el estudio formal del álgebra, promoviendo así un mayor grado de generalidad en el pensamiento de los estudiantes y aumentando su capacidad para expresar la generalidad [6].

En la matemática escolar, se destacan cuatro enfoques-generalización, relaciones y funciones, modelación, resolución de problemas- para la enseñanza del álgebra. Con respecto a estos cuatro enfoques, Lee [7] afirma que "No es difícil demostrar que la función, la modelación, y la solución de problemas son todas actividades de generalización, que el álgebra y todas las matemáticas trata con generalización y patrones" (p.102). Además, esta autora sostiene que los estudiantes generalizan cuando producen una expresión o representación sucinta a partir de la comprensión que tienen. Por esto, se entiende la generalización como el enfoque del álgebra que orienta esta investigación.

En [8] se presenta la generalización como una actividad intelectual que realizan los individuos habitualmente y que consiste en detectar regularidades y generar una expresión para estas. Sin embargo, [9] plantea que los profesores norteamericanos tradicionalmente proponían problemas para completar secuencias o para encontrar el término general que representaba dicha secuencia, pero los estudiantes necesitan ir más allá, en sentido que deben construir, expresar y justificar la generalización de patrones. Esto sugiere que las tareas propuestas por los profesores no solo deberían valorarse por la capacidad del estudiante para seguir instrucciones sino también por el proceso de generalización; además, este argumento justifica la pertinencia de promover tareas de generalización a partir de los primeros grados.

Con respecto a la generalización, en el marco de la educación escolar, en [10] distinguen entre la generalización matemática y la generalización en educación matemática, argumentando que la primera se centra en la validación de pruebas para ser aceptada como tal mientras que la segunda tiene en cuenta las expresiones empleadas y el razonamiento involucrado en estas.

A diferencia de la generalización matemática, en la cual se concibe una expresión que considera todos los casos, esta investigación tiene una perspectiva de la generalización en educación matemática, donde se valora la exploración de patrones y la consideración de nuevos casos, a partir de una regla, que no necesariamente coincide con una estrategia convencional. Esta afirmación es ratificada por los autores de [11], quienes afirman que los estudiantes habitualmente parten del ámbito numérico o figural para expresar la generalidad de las tareas que implican patrones.

[12] argumenta que la generalización de patrones refiere a la capacidad de identificar una regularidad en algunos casos particulares, y a extender esa regularidad a otros términos, permitiendo así una expresión vinculada con todos los términos de la secuencia. Este autor reconoce diferentes aspectos involucrados en esta definición; en primer lugar, la identificación de una regularidad que aplica para algunos casos de la secuencia, luego se generaliza esa regularidad a todos los términos de la secuencia. También argumenta que la generalización de patrones no depende del uso de notaciones sino del tratamiento que se da a la secuencia.

[13] hace una distinción entre la generalización cercana, que consiste en la identificación de un patrón a partir de una estrategia de conteo, un dibujo o una tabla; y la generalización lejana, que se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere. Esta distinción es pertinente para clasificar las tareas que se han considerado en el marco teórico y el diseño metodológico para la producción de datos de los estudiantes.

En esta investigación se asume que un niño generaliza cuando tiene la posibilidad de enunciar el cumplimiento de una regla de formación que permite construir una configuración correspondiente a una secuencia dada. Esta definición sugiere que los niños que no enuncian también pueden generalizar, aunque el investigador no tenga evidencias para documentarlo, y por tal razón no se considere en el informe de investigación.

Se entienden las secuencias pictóricas como listas de dibujos que se caracterizan por estar organizados de cierto modo y que obedecen a una regla. Quien responde alguna de las tareas, propuestas en este trabajo, debe asignar las características que definirían la organización de una secuencia pictórica y la regla de formación para la secuencia de dicha tarea. En las tareas propuestas para esta investigación, los dibujos se presentan de izquierda a derecha.

Si bien las investigaciones revisadas recomiendan la generalización de patrones como un punto de partida para la enseñanza del álgebra en los primeros grados y ofrecen una perspectiva al problema descrito, no se han encontrado investigaciones sobre la transición desde las secuencias pictóricas hasta la generalización de patrones lineales. Así, el tema específico de la investigación puede verse como un aporte al ámbito de la investigación sobre generalización.

En los siguientes apartados se comenta la metodología utilizada, se ofrece la descripción de todas las tareas propuestas a los estudiantes, posteriormente se muestran las soluciones dadas por uno de ellos, a continuación, se discuten las maneras de generalizar de los estudiantes, y finalmente se propone el apartado de conclusiones.

METODOLOGÍA

El modo de entender la generalización de patrones lineales en este trabajo sugiere un diseño cualitativo [14], dado que se pretende analizar maneras, entendidas como conocimiento procedimental, que se manifiestan en las respuestas verbales y escritas de los estudiantes. El diseño se complementa con entrevistas semiestructuradas realizadas después que los estudiantes entregaron sus soluciones. Se indagó por el sentido que los estudiantes otorgan a las secuencias y que se expresan mediante respuestas verbales. La investigación se desarrolla en una institución educativa de carácter público, de naturaleza mixta y ofrece educación básica y educación media. De 48 estudiantes matriculados en el grupo, tan solo participaron 20-12 niños y 8 niñas- a quienes sus tutores legales concedieron permiso para participar en la investigación. Las categorías emergentes se toman de los datos de los 20 estudiantes. Sin embargo, se presenta la información producida por cuatro niños de quinto grado. Esta decisión se debe al volumen de la información producida, y al interés de la investigación por generar una comprensión profunda del objeto de estudio. La elección de los estudiantes participantes de la investigación, corresponde a los criterios mencionados a continuación: el estudiante matriculado en quinto grado asiste siempre o casi siempre al aula, el acudiente autoriza la participación del estudiante en la investigación, el estudiante participa activamente o responde –de forma verbal y escrita- en clase, la profesora titular del curso está de acuerdo en que cada estudiante aportará información relevante para el proyecto, el estudiante afirma que quiere participar en la investigación.

Se informó a los niños de los derechos que les asistían al participar en esta investigación [15]. Se tomaron todas las acciones para evitar someter a los niños a condiciones de estrés emocional. No se presta atención al género en esta indagación.

Las tareas diseñadas proponen estudiar el reconocimiento de diversos tipos de patrones (generalización de patrones lineales a partir de secuencias pictóricas); de expresión de ellos (mediante diversos modos de representación) y de validación (mediante diversos modos de justificación).

Se entiende la tarea como una pauta escrita en la cual el estudiante asume que debe dar una respuesta [16], y se considera la tarea en esta investigación como aquella que involucra secuencias pictóricas que obedecen a un patrón, que deben ser reconocidas, expresadas y validadas por los estudiantes.

Las tareas se entregan por escrito para que los estudiantes de quinto grado de educación primaria respondan a las cuestiones planteadas en la tarea. Las cuestiones se vinculan con: el reconocimiento, la representación, el registro, la justificación y la validación de los patrones presentes en las secuencias pictóricas. La acción de registro, como expresión de ese reconocimiento, ocurre cuando el estudiante representa por escrito una regularidad identificada en la secuencia [17].

Se propusieron las tareas a los estudiantes y se les pidió no borrar sus procedimientos en caso de error, y que, cuando se equivocaran, reescribieran sin borrar lo que habían escrito. Se les pide que encierren o resalten sus errores con un color, y sigan trabajando en la misma hoja o en otra, para que entreguen la tarea al finalizar cada sesión, que dura aproximadamente una hora.

Se realizaron cinco sesiones durante el período producción de datos. Se han diseñado tareas de generalización para que los estudiantes identifiquen características de algún elemento de la secuencia que esté localizado ya sea en una posición cercana o en una posición lejana en la enumeración.

Se decidió trabajar con niños individualmente por varias razones: la primera es que las respuestas de un estudiante pueden influenciar las respuestas de los otros niños participantes; la segunda es que interesa estudiar las justificaciones que cada niño da a su respuesta; la tercera es que la Institución no recomienda extraer a varios niños de la clase al mismo tiempo. Cabe aclarar que interesa saber cómo generaliza cada niño y no se presta atención a la interrelación entre ellos. La razón para esta decisión es de carácter administrativo, en tanto que el investigador no tiene acceso al grupo total ni puede modificar las condiciones de aula.

Los niños resolvieron las tareas de forma individual, y en completo silencio, posteriormente, una vez se hubo estudiado sus respuestas se entrevistó a los niños y se grabó el audio de las sesiones.

Se asume la postura de [18] quienes afirman que el análisis es un examen sistemático conjunto de elementos informativos –verbales, escritos, gestuales- para delimitar partes y descubrir relaciones entre los mismos. Para estos autores el análisis de datos cualitativo es el tratamiento de datos, conservando su naturaleza textual, es decir, sin necesidad de acudir a técnicas estadísticas.

Se decidió no proponer categorías a priori y se decantó por investigar las categorías emergentes que se explicitan en este texto. Se analizaron las soluciones dados por los estudiantes, y se buscó: tipo de representación usada para dar la respuesta, tipo de patrón identificado, y justificación dada por los estudiantes.

Las maneras de generalizar patrones lineales se analizan a partir tanto de las respuestas que dan a las tareas como de los diálogos que surgen durante la entrevista semiestructurada. Cada entrevista es individual y se hizo después que los estudiantes respondieron a cada tarea. No hay un interés por evaluar ni la validez matemática de las soluciones ni la validez argumentativa propuesta por los estudiantes en estas generalizaciones, aunque interesa estudiar las justificaciones con las cuales los estudiantes acompañan sus soluciones.

Una vez que los niños respondieron las preguntas se inició el análisis de las soluciones y cada uno de los investigadores formuló, independientemente, categorías de agrupación para estas, se efectuó un proceso de perfeccionamiento de los criterios que definen las categorías hasta llegar a las que se presentan a continuación.

Descripción de las tareas

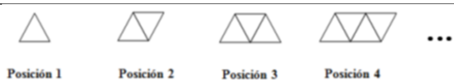
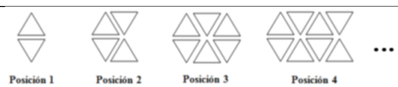
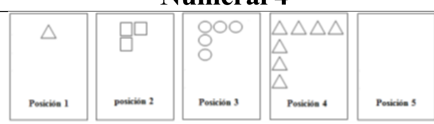
Se asume la tarea como una pauta escrita a la que el estudiante da respuesta y que involucra secuencias pictóricas, que deben ser reconocidas, expresadas y validadas por los estudiantes [16]. La secuencia pictórica se entiende como una sucesión de figuras que obedecen a un patrón. Las tareas se diseñaron para estudiar el reconocimiento de diversos tipos de patrones, su expresión y su validación.

Las tareas sobre secuencias pictóricas requieren que los estudiantes desarrollen las siguientes acciones: continuación, completar, ordenamiento, construcción y descripción. Adicionalmente se proponen dos tipos de tareas de generalización: posición cercana y posición lejana [13]. Tareas de posición cercana son aquellas en las cuales el estudiante debe continuar, completar u ordenar una secuencia, mientras que tareas de posición lejana son aquellas tareas que demandan la construcción de una regla de formación. La regla suele ser oral o escrita de carácter descriptivo. Las categorías propuestas son emergentes.

Continuar una secuencia (Tarea A)

Esta tarea pide dibujar el siguiente elemento o siguientes elementos a partir de una secuencia dada. Los numerales para esta tarea se muestran en la Tabla 1.

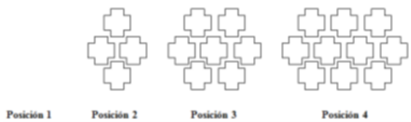
Tabla 1. *Tarea A y sus numerales*

Numeral 1	**Numeral 3**
 Este numeral pide dibujar la figura que va en la quinta posición, dadas las cuatro posiciones anteriores. Fuente: tomado de [19] y [20]	 •Dibuja las tres figuras que siguen •Escribe el proceso de construcción para las figuras construidas anteriormente •¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 10? Fuente: elaboración propia
Numeral 2	**Numeral 4**
 Dibuja la figura que va en la posición 6. Explica el procedimiento que realizaste para dibujar la figura de la posición 6 ¿Cuántos triángulos tiene la figura de la posición 6? Fuente: tomado de [21]	 Este numeral pide: Dibujar la configuración correspondiente a la quinta posición de la secuencia, dadas las configuraciones de las cuatro posiciones anteriores Fuente: elaboración propia

Continuar una secuencia (Tarea B)

Esta tarea pide encontrar la configuración correspondiente a una posición que se encuentra entre dos posiciones dadas, y cuyas configuraciones son conocidas. Los numerales para esta tarea se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. *Tarea B y sus numerales*

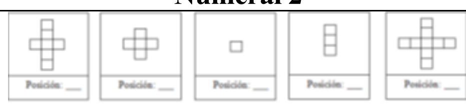
Numeral 1	Numeral 2
 Se pide completar la secuencia, dibujando la configuración que hace falta. Fuente: tomado y modificado de [11]	 Se pide completar la secuencia, dibujando la configuración que hace falta. Fuente: tomado y modificado de [21]

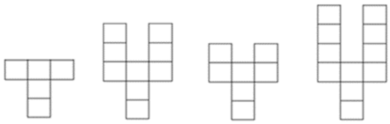
En ocasiones, también se indaga por la primera posición cuando se han dado posiciones posteriores. No se proponen configuraciones en las que falten posiciones intermedias.

Ordenar elementos de una secuencia (Tarea C)

Esta tarea pide tanto determinar la posición de cada elemento de una secuencia como identificar elementos que no pertenecen a esta. Los numerales para esta tarea se muestran en la Tabla 3.

Tabla 3. *Tarea C y sus numerales.*

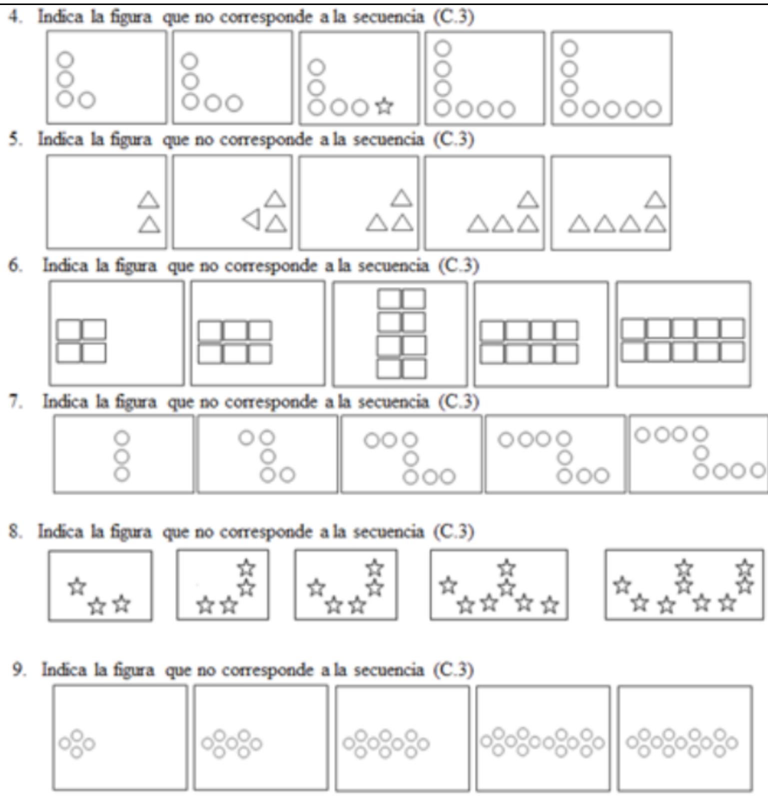
Numeral 1	Numeral 2
 Se pide escribir la posición correspondiente a cada configuración de la secuencia dada, donde se afirma que los elementos podrían estar en desorden. Fuente: tomado y modificado de [22]	 Se pide asignar la posición a cada configuración dada. Fuente: tomado y modificado de [23] y [17]
Numeral 3	



En este numeral se pide ordenar la secuencia, indicando cuál configuración se asigna a la primera posición, cuál a la segunda posición, cuál a la tercera y cuál a la cuarta.

Fuente: tomado de [22]

Numeral 4



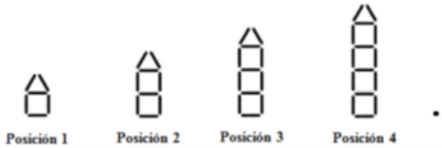
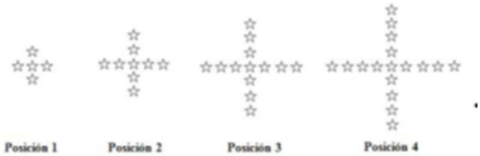
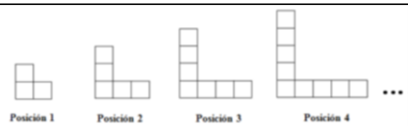
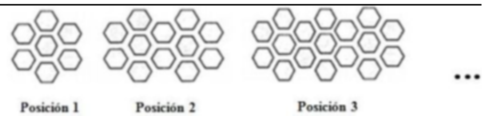
Estos seis Numerales piden que se identifiquen las configuraciones-viñeta- que no corresponden en cada una de las secuencias dadas. El objetivo es identificar las características que cada niño destaca para determinar la inclusión o la exclusión de una configuración en una secuencia. En cada secuencia hay una viñeta que no corresponde al patrón estándar. En caso de que un estudiante señale, erróneamente, una viñeta, se estudia la justificación que el estudiante ofrece.

Fuente: elaboración propia

Construir un elemento que corresponda a cualquier posición de la secuencia (Tarea D)

Los numerales para esta tarea se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4. *Tarea D y sus numerales*

Numeral 1	**Numeral 2**
 Se pide describir el procedimiento realizado para construir la configuración en la siguiente posición, la quinta posición, a partir de las cuatro configuraciones anteriores. Además, se indagaba por la cantidad de 'palos' que tendría la configuración de la décima quinta posición en la secuencia. Fuente: tomado de [24] y [25]	 Se pide escribir la cantidad de estrellas que deberían estar en la decimocuarta posición. Fuente: tomado de [17]
Numeral 3	**Numeral 4**
 Este numeral pide determinar una cantidad a partir de una secuencia dada. Cada niño podía escoger la posición y determinar la cantidad de figuras en esa posición. Fuente: tomado y modificado de [16]	 Este numeral presenta una secuencia pictórica a partir de la cual se pide: Dibujar la configuración correspondiente a una posición pedida; determinar la cantidad de figuras correspondiente a una posición lejana en la secuencia, y elaborar un procedimiento para encontrar la cantidad de figuras correspondientes a una posición cualquiera e indeterminada. Fuente: tomado de [26]

Las categorías de las tareas, que se propusieron, se muestran en la Tabla 5; que se obtuvieron a partir de la revisión de la literatura.

Tabla 5. *Categorías de tareas*

Tareas de posición cercana	Continuar una secuencia	Dibuja las figuras siguientes. Determina la cantidad de elementos correspondiente a una configuración faltante, en la secuencia. Explica el dibujo o la cantidad determinada para la continuación de la secuencia.
	Completar una secuencia	Dibuja figuras que faltan entre los dibujos de algunas posiciones dadas.
		Determina la cantidad de elementos ubicados en una posición cercana de la secuencia.
	Ordenar elementos de una secuencia	Identifica la posición de algunos elementos de una secuencia. Construye una secuencia cuyos elementos se encuentran desordenados. Reconoce elementos que no pertenecen a una secuencia. Justifica la disposición de las figuras en una secuencia.
Tareas de posición lejana	Construir un elemento que corresponda a cualquier posición de la secuencia	Elabora un procedimiento para construir un elemento de la secuencia en una determinada posición. Dibuja la figura correspondiente a una posición que el estudiante decida en la secuencia. Determina la cantidad correspondiente a cualquier figura de la secuencia.

Fuente: elaboración propia

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE UNO DE LOS NIÑOS

Debido a las limitaciones de espacio se discutirán las respuestas de uno de los niños, si bien el artículo informa sobre las formas de generalización de los trabajos de cuatro niños: Camilo, David, Lucia y Jhony.

Categorías emergentes

En el numeral primero de la Tarea A, Camilo menciona que se 'fijó' inicialmente en la configuración de la posición 1, y luego miró la posición 2 para encontrar que 'algo' cambió, ese algo es el triángulo que se agregó al costado derecho de la posición 1. Sin embargo, afirma que siguió verificando en las configuraciones en las posiciones tercera y cuarta respectivamente para comprobar su sospecha, y como aprecia que funciona la estrategia de agregar cada vez un triángulo en el costado derecho, decide dibujar la configuración de la quinta posición a partir de la reproducción de la cuarta posición y agregar un triángulo. Al comparar las dos primeras configuraciones de la secuencia y sospechar que debía agregar un triángulo por cada posición consecutiva, lo cual comprueba en las otras posiciones dadas, Camilo encuentra un patrón.

En la respuesta escrita (Figura 1) Camilo señala con una flecha el lugar en el cual debe adicionar un triángulo a partir del dibujo correspondiente a la cuarta posición.

Figura 1. Respuesta de Camilo al Numeral 1 de la Tarea 1.
Fuente: respuesta de Camilo

El numeral segundo de la Tarea A (Incluye tres cuestiones: Dibujar, Explicar y Determinar la cantidad de triángulos en una posición dada), Camilo menciona la cantidad de triángulos que hay en cada posición para explicar su decisión de agregar dos triángulos a la última configuración mostrada, y así dibujar la correspondiente a la siguiente posición. Además, afirma "…entonces, en la posición cinco puse la misma posición que está en la cuatro y seguí como creo que es la circulación".

La presencia de un enfoque funcional parece estar sugerido por la manifestación verbal de posición versus cantidad [6,27]. El estudiante construye la siguiente figura a partir de la reproducción de la última configuración dada sobre la cual agrega lo que corresponda, según el cambio que haya identificado entre otras configuraciones consecutivas de la secuencia dada. Además, Camilo emplea la palabra "circulación" para denotar lo que en la literatura se conoce como patrón de repetición de los triángulos [28], los cuales cambian de lugar entre sí, y presentan una estructura cíclica.

En el numeral tercero de la Tarea A, Camilo afirma que los triángulos formaban "como un círculo" dado que los triángulos generan una configuración que se va cerrando. Al construir la configuración de la sexta posición, afirma que no encuentra una estrategia para continuar esta secuencia, finalmente responde que "a partir de la sexta posición hay seis triángulos en la posición pedida, posición 10". Camilo afirma que respondió por la última posición conocida para él.

En el numeral cuarto de la Tarea A, Camilo afirma que deben emplearse todas las figuras conocidas y por tal motivo decide dibujar rectángulos, puesto que "…es la última figura que falta. Ya está el cuadrado, ya está el triángulo, ya está el círculo". Además, tiene en cuenta las figuras que deben ubicarse en las posiciones, sin tener en cuenta la cantidad como una característica de esta secuencia, para dibujar esa cantidad de figuras en la posición requerida. Se aprecia que Camilo atendió a las formas sin considerar la cantidad como una característica de esta secuencia. La atención a las formas se conoce como "el problema fenomenológico" en la generalización de patrones [29].

Estas características permiten inferir que Camilo ha identificado patrones, dado que reconoce que hay "algo" que cambia, ya sean formas o cantidades, en las configuraciones mostradas en la secuencia. Además, hace una generalización cercana [13], en tanto que se basa en las figuras mostradas para construir las configuraciones siguientes, algunas veces considerando las cantidades y otras considerando la disposición de las figuras. En las respuestas de Camilo se reconoce generalización en tanto que identificó características que le permiten hacer predicciones sobre las configuraciones que conformarán la secuencia [30].

Si se asume la flexibilidad como una habilidad cognitiva para cambiar el proceso de resolución de una tarea ante una pauta diferente [31,32], se puede concluir que Camilo responde de manera flexible. En la respuesta al numeral primero de la Tarea B se aprecia flexibilidad cuando Camilo menciona que puede responder a partir de la operación "resta" al comparar configuraciones consecutivas de derecha a izquierda, y la operación "suma" al hacer la comparación de izquierda a derecha.

Investigador: Ah. Entonces, lo que quiere decir es que para pasar de la posición dos a la tres, hay que sumar. Pero, para pasar de la cuatro a la tres, hay que restar.

Camilo: Porque aquí [señalando la posición dos] hay tres en cada una [de las diagonales], y aquí [señalando la posición cuatro] ya hay siete. Entonces, yo me puse a contar cuánto le falta al tres para llegar al siete. Y me di de cuenta que, le faltan, le faltan cuatro. Entonces, aquí generalmente van a ir cuatro para que aquí se aumenten tres. Acá, hasta aquí, llega el cuatro, y vea que se aumentan las tres.

Investigador: Entonces, cuando usted dice que "aquí van cuatro", ¿es desde un extremo hasta la mitad?

Camilo: ¡¡No!!, cuatro toda la línea. Hasta, de aquí a aquí, que vayan, que haya cuatro.

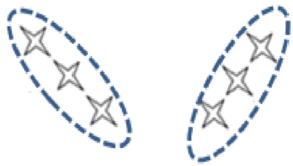
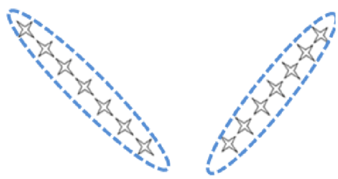
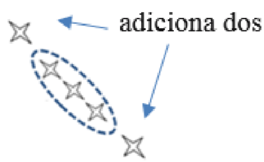
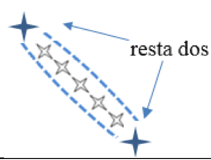
Investigador: ¿Cuatro estrellas?

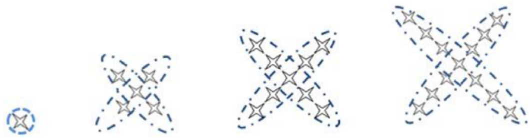
Camilo: ¡Sí!

Camilo afirma que verificó su respuesta, y durante la entrevista reconoce que cometió un error. Asegura que una posición cualquiera debe tener menos figuras que la posición siguiente, y al comparar la cantidad de figuras de su dibujo correspondiente a la tercera posición y la cantidad correspondiente a la cuarta posición, encontró que no se cumplía esta condición. Después de reconocer el error, Camilo propuso una estrategia para seguir construyendo la secuencia (Tabla 6) y afirma que en cada una de las dos diagonales debe sumar dos estrellas (una estrella en cada extremo) al comparar dos posiciones consecutivas de izquierda a derecha. Sin embargo, también afirma que debe 'restar' dos estrellas por cada diagonal al comparar dos posiciones consecutivas de derecha a izquierda. La Tabla 6 ilustra la estrategia propuesta por Camilo, después de haber reconocido el error.

Tabla 6. *Estrategia de Camilo para resolver el Numeral 1, Tarea B*

Respuesta	Descripción
Como puede ver, me equivoque	Camilo reconoció, después de haber entregado la tarea escrita, que se había equivocado. En esta respuesta escrita se aprecia que Camilo dibuja las estrellas, según las diagonales que menciona en la entrevista.

	
Hay tres en cada una	Camilo cuenta la cantidad de estrellas que hay en cada diagonal de la segunda posición. 
Aquí hay siete	Camilo encuentra que hay siete estrellas en cada diagonal de la cuarta posición 
Hay que sumar	Para construir la configuración de la tercera posición, a partir de la segunda posición, Camilo agrega dos estrellas en cada diagonal: agrega una estrella en cada extremo, conservando la configuración de la segunda posición. 
Hay que restar	Para construir la configuración de la tercera posición, a partir de la cuarta posición, Camilo 'resta' dos estrellas en cada diagonal: 'resta' una estrella en cada extremo, conservando las demás estrellas de la configuración. 

Esquema de la respuesta dada por Camilo durante la entrevista	Camilo aprecia dos diagonales, a partir de la segunda posición, para referirse a la manera como debe agregarse. Encuentra que se agregan dos estrellas en cada una de las diagonales, a medida que se considere cada posición de izquierda a derecha. Camilo propone que se restan dos estrellas, por cada posición que se considere de derecha a izquierda. 

Fuente: elaboración propia

En el numeral segundo de la Tarea B, Camilo identifica la cantidad de figuras que debe “quitar” a una configuración para obtener la configuración de la posición anterior. Verifica que entre las posiciones siguientes se conserva la diferencia. Sin embargo, afirma que la “resta” no es el único procedimiento y sugiere que “desde la posición cuatro hasta la uno puede ir restando”, y desde la posición uno hasta la cuatro verifica que la suma sea constante. Camilo afirma que puede “quitar” de varias formas, para formar la configuración de la primera posición, es decir, las figuras pueden quitarse del costado derecho o del izquierdo, y esto es indiferente para responder correctamente esta cuestión. Camilo responde de manera flexible [31,32] y emplea múltiples estrategias para responder una misma cuestión. Una de las estrategias consiste en quitar a un costado; otra consiste en quitar al otro costado, y otra más refiere a sumar la misma cantidad entre posiciones consecutivas de izquierda a derecha.

En los numerales primero, segundo y tercero de la Tarea C, afirma que pudo asignar posiciones a las configuraciones que se habían dado en desorden “porque la primera debe ser la que menos tiene y la última la que más tiene” y con este criterio organiza las configuraciones de menor a mayor, según la cantidad de figuras que contengan.

En los numerales, desde el cuarto hasta el noveno de la Tarea C, Camilo discrimina algunas características fenomenológicas [29] tales como la forma de cada figura (numeral cuarto) y de cada configuración (numeral octavo), disposición (numeral quinto), orientación (numeral sexto), y cantidad (numerales séptimo y noveno) para decidir acerca de las configuraciones que deberían excluirse de cada secuencia, por el incumplimiento de alguna de las características mencionadas en cada numeral. Camilo responde que los numerales cuarto y quinto son diferentes porque en este último había que considerar otra característica, aunque se presentan las mismas figuras.

En el numeral primero de la Tarea D, afirma que dibujó un cuadrado en la parte inferior, agregó otros cuadrados sobre este cuadrado, uno sobre otro, y finalmente dibujó un triángulo en la parte superior. Luego contó segmentos (palitos) que conforman el dibujo que propuso. Cuando se le pidió escribir la cantidad correspondiente a una posición pedida, hizo un dibujo y contó a partir de este. Es decir, su estrategia fue dibujar la configuración correspondiente a la posición pedida y luego contar segmentos.

En el numeral segundo de la Tarea D, independiente del conteo horizontal o vertical, Camilo afirma que hay tres figuras en una de las configuraciones dadas. El lector puede verificar que, de cualquiera de estas dos formas de conteo, se obtiene la misma cantidad.

Camilo: Primero miré las figuras, en qué secuencia estaban. Entonces, primero miré, en la primera hay tres. Y vi que, en la segunda, ya hay un uno, dos, tres, cuatro, cinco. Entonces, me di de cuenta que se va aumentando de a dos.

En el numeral tercero de la Tarea D, Camilo menciona que hay un cambio vertical y un cambio horizontal, para explicar la formación de la figura en cada posición de la secuencia. Es decir, reconoce un cambio en dos direcciones (hacia arriba y hacia el lado derecho).

Camilo: En la primera posición, hay dos. Y para el que está caído, hay uno. Entonces, aquí ya hay tres [verticalmente, en la segunda posición], y aquí había dos [horizontalmente, en la segunda posición, sin contar el extremo izquierdo, que coincide con el extremo inferior de la vertical]. Aquí ya hay dos [verticalmente, en la primera posición], y aquí [horizontalmente, en la primera posición, sin contar el extremo izquierdo] ya había uno. Y mi estrategia fue seguirle aumentando a cada lado.

En el numeral cuarto de la Tarea D, emplea la multiplicación como estrategia para determinar la cantidad de hexágonos que habría en cualquier configuración. Por ejemplo, para la posición 7, escribe 7x5 y afirma que habría 35 hexágonos en esta posición, y dibuja una configuración que tiene esta cantidad de hexágonos; para la posición 30, escribe 30x5, y responde que habría 150 hexágonos. Cuando se le preguntó por una posición indeterminada de la secuencia, escogió la sexta posición, dibujó la configuración correspondiente y escribió 6x5, respondiendo que en la sexta posición habría 30 hexágonos. En las configuraciones propuestas se aprecia que no dibujó en los extremos (izquierdo y derecho) las dos figuras que presenta la secuencia en las primeras posiciones dadas, sino que en ambos casos dibujó solo una figura en cada extremo. De esta manera, al comparar la operación efectuada con el dibujo, se aprecia una correspondencia.

Cuando se le pregunta explícitamente por la estrategia empleada para responder, afirma que debe multiplicar, y enuncia de manera verbal otra secuencia con la que funciona la estrategia que ha propuesto, y así justifica la estrategia que empleó para responder este numeral.

Camilo: Digamos que usted me dio la posición número siete. Entonces, yo multiplico la posición número siete con la cantidad de hexágonos que se están aumentando en cada posición. Por ejemplo, en la primera, digamos que hay dos, y en la segunda, ya hay cuatro. Entonces, mi estrategia sería ir aumentando de dos en dos, en cada posición. Se multiplicaría siete por dos (Entrevista, 17 de octubre, 2014).

Se aprecia que multiplicó la cantidad correspondiente a la posición pedida y la cantidad correspondiente al aumento que él estableció entre dos posiciones consecutivas.

Categorías emergentes

En este apartado se presentan seis categorías que surgieron del análisis realizado a las respuestas dadas a las tareas. Estas categorías se han denominado: Reconocimiento de una base, Desconfiguración y Reconfiguración, Relación numérico-figural, Verificación del cumplimiento de la regla de formación enunciada, Cierre de configuraciones, y Reversibilidad en la generalización. Estas categorías se obtuvieron mediante una triangulación independiente entre dos investigadores.

Reconocimiento de una base: La base es la configuración a partir de la cual se presupone que se han construido las demás configuraciones de la secuencia. Por esta razón, la base debe estar presente en cada una de las configuraciones de una secuencia. La identificación de la base permite ordenar configuraciones en una secuencia, a partir de un ordenamiento creciente. A la base se le adiciona una cantidad, según la posición pedida, para determinar la cantidad que corresponde a tal posición.

La base puede ser una cantidad constante, que siempre se adiciona para determinar la cantidad de figuras que hay en una posición de la secuencia. La base también puede ser una figura o un grupo de figuras que se presenta en cada Desconfiguración y Reconfiguración.

La Desconfiguración: Es la descomposición de una configuración en partes susceptibles de ser estudiadas como patrones de repetición o como patrones de crecimiento.

La Reconfiguración: Es la agrupación de partes en una configuración susceptible de ser estudiada como un todo en la secuencia.

Relación numérico-figural: Consiste en el reconocimiento de una operación que permite encontrar la cantidad de configuraciones que hay en cualquier posición de la secuencia. Las operaciones efectuadas por los estudiantes son de diversos tipos:

- Multiplicación entre el patrón de crecimiento (cantidad que se adiciona entre posiciones consecutivas) y la posición pedida.
- Multiplicación y adición de la base (como cantidad constante).
- Multiplicación entre la cantidad de configuraciones que hay en una posición elegida (habitualmente es una de las configuraciones de la secuencia dada) y la cantidad de veces que debe multiplicarse la posición elegida para generar la cantidad correspondiente a la posición pedida (este segundo factor es el cociente entre la posición pedida y la posición elegida, que se caracteriza por ser un número entero).
- Suma de las cantidades de figuras que resultan en cada una de las partes que se han generado tras hacer una Desconfiguración.
- Adición sucesiva de una cantidad (que se ha encontrado entre las posiciones consecutivas que se han dado en la secuencia), hasta la posición pedida.

Verificación del cumplimiento de la regla de formación enunciada. Las operaciones efectuadas por los estudiantes son de diversos tipos:

- Ejemplos parecidos, con los cuales se cumple la regla de formación enunciada (por ejemplo, 2, 4, 6, … 2xn).
- Correspondencia entre cantidad de figuras del dibujo y cantidad que resulta de aplicar un algoritmo (Prestar atencion a alguna configuración dada en una secuencia, y aplicar la regla).
- Empleo de otra estrategia (conteo sucesivo, y tablas de multiplicar).
- Cambio constante identificado entre configuraciones correspondientes a posiciones consecutivas de la secuencia.

Cierre de configuraciones: El cierre de configuraciones consiste en agregar figuras a una configuración determinada, hasta apreciar una figura cerrada que pueda parecerse a una circunferencia (numeral octavo de la Tarea C). Cuando los niños utilizan este tipo de generalización, afirman "no saber" por el lugar en el cual seguirían agregando figuras.

Reversibilidad en la generalización: Este proceso hace parte de la flexibilidad en la generalización. Así como encuentran las configuraciones de posiciones sucesivas, también lo hacen cuando se les pide las configuraciones antecedentes.

Conclusiones

En las respuestas ofrecidas por los niños se aprecia que hay patrones en la identificación de un "cambio constante" al reconocer que hay aumento constante entre términos consecutivos de la secuencia. Esto se aprecia en la operación realizada, por ejemplo, la adición sucesiva o la multiplicación por cinco que mencionan los niños participantes. Además, se aprecia una invariante en la estrategia, que consiste en sumar después de realizar la multiplicación, independiente de la posición por la que se preguntaba. Aunque los niños no emplean estas denominaciones -cambio constante, adición sucesiva, invariante- se reconoce en su verbalización.

Los niños propusieron una generalización lejana al responder por la manera en que determinarían la cantidad correspondiente a una posición cualquiera. La generalización de este tipo se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere [13]. Además, en este trabajo se encontró que los cuatro niños hicieron una generalización teórica [33], que consiste en ampliar la cantidad de casos a los que se refiere -posiciones en la secuencia- para responder, sin necesidad de recurrir al conteo sucesivo o construcción de dibujos.

Los niños propusieron una generalización lejana [13], en la cual se emplea una regla de formación que permite calcular, de forma inmediata, el término de cualquier posición de la secuencia. Por ejemplo, Camilo afirma que debe multiplicarse la posición pedida por la cantidad correspondiente al incremento constante; mientras que Jhony afirma que además de tener en cuenta el incremento constante que expresaron como una multiplicación, también había que considerar la cantidad que siempre había que adicionar a tal multiplicación; y Lucía empleó una estrategia que consiste en expresar la cantidad de figuras que debería tener la posición pedida como el producto entre la cantidad correspondiente a una posición, conocida para ella, y el factor por el cual se obtiene la posición pedida en la tarea.

Las respuestas ofrecidas por los estudiantes David, Camilo, Jhony y Lucía, ante las tareas propuestas, evidencia la exploración de patrones y la consideración de nuevos casos en esta exploración, a partir de una regla, que no necesariamente se representa con simbolismo convencional y que no necesariamente incluye todos los casos posibles en la construcción de la secuencia, puesto que algunas respuestas se expresaban mediante expresiones pictóricas y otras se expresaban mediante expresiones verbales. De este modo la actividad de generalización por parte de los niños no se reduce a la expresión formal, sino que atiende a otro tipo de expresiones que denotan propiedades relativas a las configuraciones expuestas en la tarea.

Las diversas formas de expresión empleadas por los estudiantes han sido reportadas en diversas investigaciones. En [34] reportan que la generalización verbal cobra importancia sobre otras formas de expresión de la generalización en los primeros grados. De acuerdo con [29], el problema semiótico de la generalización de patrones está vinculado con la denotación del objeto, que puede expresarse en varias formas de representación. [29] plantea que la generalización algebraica no necesariamente está vinculada con el simbolismo algebraico alfanumérico, puesto que la denotación de la generalización algebraica puede realizarse a través de otras formas de representación.

Las tareas propuestas a los niños permitieron identificar diversas estrategias para generalizar patrones lineales. Algunos niños, por ejemplo, identificaron un incremento constante, otros emplearon las tablas de multiplicar y otros establecieron una razón de cambio. Estas estrategias, aunque no necesariamente conducían a una respuesta correcta, permiten inferir que los niños generalizan patrones lineales de maneras diversas que corresponden a las identificaciones de características figurares que no son fácilmente previsibles por el profesor.

En cuanto a la naturaleza de la generalización producida [33,35], los estudiantes hacen una generalización empírica en tanto que recurrieron a una estrategia considerada por ellos mismos -conteo, adición sucesiva, multiplicación sucesiva- para dar respuesta a la tarea, en lugar de emplear una regla de formación asignada para todos los casos y establecida previamente por un referente de autoridad -profesor, libro de texto-. Es decir, los niños enuncian características que sirvieron para producir una regla de formación, en función de la tarea propuesta pero tales características, aunque sean atribuidas a todas las posiciones de la secuencia, no les permitía responder de inmediato por una posición más distante, debido a la estrategia que emplearon. Además, usaron dibujos o listas de números para determinar la cantidad de figuras que habría en una configuración correspondiente a la posición solicitada en la tarea.

Cuando se preguntó a los niños por las dificultades que enfrentaron en la resolución de cada tarea, algunos respondieron que las tareas más fáciles eran aquellas en las que les pedían dibujar. Era una hipótesis en la investigación que los aspectos figurales facilitarían dar respuesta a las preguntas. Sin embargo, las tareas de generalización lejana pueden ser tediosas cuando se pide dibujar. Lucía afirma "Esta estaba muy larga. Los dibujos muy difíciles", cuando se le preguntó por la Tarea D, en la cual debía dibujar configuraciones correspondientes a posiciones lejanas.

Durante el proceso de generalización, los estudiantes pueden validar sus respuestas cuando vinculan las configuraciones expuestas en la tarea con una regla de formación de patrones que hace referencia tanto a las configuraciones presentes como a las ausentes en la tarea. En el aspecto numérico, las generalizaciones cercanas invocan estructuras aditivas, mientras que en las generalizaciones lejanas invocan las estructuras multiplicativas.

Las categorías emergentes Reconocimiento de una base, Desconfiguración y Reconfiguración, Relación numérico-figural, Verificación del cumplimiento de la regla de formación enunciada, Cierre de configuraciones, y Reversibilidad en la generalización dan cuenta de las diversas maneras de generalizar patrones por los niños y permiten concluir que sus maneras de generalizar son ricas y por fuera de la tendencia formalista escolar que un observador entrenado en las maneras matemáticas escolares de generalización esperaría de los niños.

Este trabajo permite apreciar que la generalización es una buena vía de entrada al estudio del álgebra en la escuela primaria, en tanto que se pudo apreciar que los niños han razonado algebraicamente a partir del reconocimiento de "un" patrón en secuencias pictóricas, y que los niños expresan la generalización gráfica, numérica o verbalmente. Sin embargo, el estudio de los patrones por parte de los niños debería ir acompañado de una actitud abierta por parte del docente, que le permitan entender formas diversas de reconocimiento y expresión de la generalidad.

REFERENCIAS

1. Ministerio de Educación Nacional – MEN. Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional; 2006. http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf
2. Martínez MV, Brizuela BM. A third grader's way of thinking about linear function tables. Journal of Mathematical Behavior. 2006; 25(4): 285–298. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.003
3. Kieran C. Algebraic thinking in the early grades: What is it? The Mathematics Educator. 2004; 8(1), 139–151. http://math.nie.edu.sg/ame/matheduc/tme/tmeV8_1/Carolyn%20Kieran.pdf
4. Ministerio de Educación Nacional - MEN. Lineamientos curriculares de matemáticas. Bogotá: Magisterio; 1998.
5. NCTM. Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 2000.
6. Molina M. Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria [Tesis Doctoral]. Granada: Universidad de Granada, 2006. http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/5490/
7. Lee L. Expressing generality and roots of algebra. En: Berdnarz N, Kieran C, Lee L, editores. Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluwer academy publishers; 1996. pp. 65–86.
8. Carraher D, Schliemann A, Brizuela B, Earnes D. Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. Journal for Research in Mathematics Education. 2006; 37(2): 87–115. http://www.jstor.org/stable/30034843
9. Blanton M, Kaput J. Building mathematical generality into curriculum and instruction. En: Cai J, Knuth E, editores. Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series. New York: Springer; 2011. pp. 5–23.
10. Carraher D, Martinez M, Schliemann A. Early algebra and mathematical generalization. ZDM Mathematics Education. 2008; 40, 3–22. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7
11. Rivera FD, Becker JR. Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En: Cai J, Knuth E, editores. Early Algebraization, Advances in Mathematics Education. Berlin-Heidelberg: Springer; 2011. pp. 323–366. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_18

12. Radford L. Towards a Cultural Theory of Learning. En: Pitta-Pantazi D, Philippou G, editores. Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education; CERME-5; 2007 Feb 22-26; Larnaca, Cyprus. Larnaca: CERME; 2007. pp. 1782–1797.
13. Stacey K. Finding and using patterns in linear generalising problems. Educational Studies in Mathematics. 1989; 20(2), 147–164.
14. Deslauriers J-P. Investigación cualitativa: Guía práctica. Pereira, Colombia: Editorial Papiro; 2004.
15. Cohen L, Manion L, Morrison K. Research Methods in Education. 5a ed. New York: Routledge; 2000.
16. Merino E. Patrones y representaciones de alumnos de 5º de educación primaria en una tarea generalización [Tesis de Maestría]. Granada: Universidad de Granada, 2012. http://funes.uniandes.edu.co/1926/1/Merino2012PatronesRepresentaciones.pdf
17. Mason J, Graham A, Pimm D, Gowar N. Rutas hacia/raíces del álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia; 1999.
18. Rodríguez G, Gil J, García E. Métodos de investigación cualitativa. Málaga: Aljibe; 1996.
19. Portan AM, Costa BE. Las regularidades: fuente de aprendizajes matemáticos. Buenos Aires: Consejo Provincial de Educación; 1996.
20. Del Moral P. Unidad didáctica: Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas [Tesis de Maestría]. Granada: Universidad de Granada, 2012.
21. Warren E, Cooper T. Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. Educational Studies in Mathematics. 2008; 67(2), 171–185. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9092-2
22. Beckmann S. Mathematics for elementary school teachers. Boston: Pearson; 2005.
23. Mason J. Expressing generality and roots of algebra. En: Bednarz N, Kieran C, Lee L, editores. Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Springer; 1996. pp. 65–86.
24. Blanton M, Kaput J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. Journal for Research in Mathematics Education. 2005; 36(5): 412–446. https://doi.org/10.2307/30034944
25. Ortega M. Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas [Tesis de Maestría]. Granada: Universidad Granada, 2012.
26. Villa-Ochoa JA. El proceso de generalización matemática. Algunas reflexiones en torno a su validación. Tecno Lógicas. 2006; (16): 139–151.

27. Van Amerom, B. (2002). Reinvention of early algebra: Developmental research on the transition from arithmetic to algebra [Tesis Doctoral]. Utrecht: Utrecht University, 2002. http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2002-1105-161148/full.pdf
28. The State of Queensland. About patterns and algebra. Queensland: Queensland Studies Authority; 2005. https://www.qcaa.qld.edu.au/downloads/p_10/kla_maths_info_pattern.pdf
29. Radford L. En torno a tres problemas de la generalización. En: Rico L, Cañadas MC, Gutiérrez J, Molina M, Segovia I, editores. Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro. Granada: Editorial Comares; 2013. pp. 3–12.
30. Castro E, Cañadas MC, Molina M. El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. UNO. 2010; 54: 55–67. http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/26079/6/Uno-54-_2010.pdf
31. Molina M. Integración del pensamiento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 años. En: Martinho MH, Ferreira RAT, Da Ponte, JP, editores. Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigacao em Educacao Matemática. Póvoa do Varzim: EIEM; 2011. pp. 27-51. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291231123005
32. Callejo ML, Zapatera A. Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. Boletim de Educação Matemática. 2014; 48(28): 64–88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a04
33. Dörfler W. En route from patterns to algebra: comments and reflections. ZDM Mathematics Education. 2008; 40(1): 143–160. https://doi.org/10.1007/s11858-007-0071-y
34. Cañadas MC, Castro E, Castro E. Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. PNA. 2008; 2(3): 137–151. https://doi.org/10.30827/pna.v2i3.6197
35. Zazkis R, Liljedahk P. Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. Educational Studies in Mathematics. 2002; 49(3): 379–402. https://doi.org/10.1023/A:1020291317178