RIME
REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA Y SU ENSEÑANZA

ISSN 2810-7187
Nº1
volumen 1 - 2024

DOI: https://doi.org/10.32735/S2810-7187202400013356

UNA PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: EL CASO DE LA ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA

A PROPOSAL FOR PRESERVICE MATHEMATICS TEACHERS: THE CASE OF MATHEMATICAL ARGUMENTATION

UMA PROPOSTA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: O CASO DA ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA

Óscar Molina[1] • Leonor Camargo[2] • Claudia Vargas[3] • Carmen Samper[4] • Patricia Perry[5]

Recibido: Jul/31/2023 • Aceptado: Sep/30/2023 • Publicado: Mar/10/2023

RESUMEN

Presentamos algunos productos de un proceso investigativo de renovación curricular de los programas de formación inicial y continuada de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), que busca promover aprendizaje sobre aspectos relativos a la argumentación. Describimos e ilustramos cómo hemos hecho operativa nuestra postura sobre argumentación matemática. Nos centramos en una aproximación metodológica que busca favorecer procesos argumentativos y convertir la argumentación en objeto de estudio en la formación inicial y en un plan formativo para profesores en ejercicio, que apunta a apoyar la transformación de su conocimiento sobre argumentación.

Palabras clave: argumento, argumentación, formación de profesores de matemáticas

[1] Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; Departamento de Matemáticas; ojmolina@pedagogica.edu.co; https://orcid.org/0000-0003-4797-1173
[2] Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; Departamento de Matemáticas; lcamargo@pedagogica.edu.co; https://orcid.org/0000-0002-2237-7306
[3] Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; Departamento de Matemáticas; cmvargasg@pedagogica.edu.co; https://orcid.org/0000-0003-2342-8950
[4] Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; Departamento de Matemáticas; csamper@pedagogica.edu.co;https://orcid.org/0000-0002-3546-1902
[5] Asesora académica proyecto DMA-615-23 CIUP-UPN, Colombia; Departamento de Matemáticas; pperryc@yahoo.com.mx; https://orcid.org/0000-0002-9162-071X

ABSTRACT

We present some products of a research process of curricular renovation for preservice and in-service mathematics teachers' programs at the Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), which seeks to promote learning on aspects related to argumentation. We describe and illustrate how we have operationalized our point of view on mathematical argumentation. We focus on a methodological approach that seeks to favor argumentative processes and turn argumentation into an object of study, which aims to support the transformation of their knowledge on argumentation.

Keywords: argument, argumentation, mathematics teacher education

RESUMO

Apresentamos alguns produtos de um processo de investigação de renovação curricular dos programas de formação inicial e contínua de professores de matemática da Universidade Pedagógica Nacional (Colômbia), que procura promover a aprendizagem de aspectos relacionados com a argumentação. Descrevemos e ilustramos como operacionalizámos a nossa posição sobre a argumentação matemática. Centramo-nos numa abordagem metodológica que procura favorecer os processos argumentativos e transformar a argumentação num objeto de estudo na formação inicial e num plano de formação para professores em exercício, que visa apoiar a transformação do seu conhecimento sobre argumentação.

Palavras-chave: argumento, argumentação, formação de professores de matemática

INTRODUCCIÓN

Desde la década del noventa del siglo pasado ha existido un interés creciente, en el campo de la Educación Matemática, por involucrar a los estudiantes en procesos de argumentación y demostración [1]. Parece haber un consenso general sobre el hecho de que el desarrollo de la habilidad de argumentar y demostrar constituye un objetivo importante de la formación matemática, por lo cual hay una tendencia general a incluir este objetivo en las propuestas curriculares nacionales e internacionales. Incluso, en ellas se señala que la argumentación y la demostración no son procesos reservados para ciertas actividades realizadas en momentos especiales, sino que deberían ser una parte natural y continua de las prácticas matemáticas del aula, independientemente del tema que se estudie.

Sin embargo, evidencias internacionales documentadas, ratificadas por nuestra labor investigativa, muestran que las pretensiones anteriores están tímidamente presentes en las experiencias escolares en Colombia. Existe una tendencia a creer que, debido a las dificultades que tienen la mayoría de los alumnos para involucrarse en la argumentación matemática, muchos profesores abandonan esfuerzos de enseñanza tendientes a favorecerla. Este fenómeno ha suscitado un apasionado debate entre los educadores de matemáticas que ha llevado a la producción de un gran número de estudios (p. ej., [1-6]).

Un rápido repaso de las contribuciones sobre los procesos de argumentación y demostración –que se pueden seguir en http://www.lettredelapreuve.org/, o leer en libros como Proof and Proving in Mathematics Education [4] y Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education [1,6]–, deja ver que históricamente los estudios se han centrado en: concepciones de los alumnos sobre la demostración; dificultades que tienen para enfrentarse a ella; intervenciones didácticas que procuran incorporar la argumentación matemática; y en cómo estas intervenciones podrían ayudar a superar dichas dificultades. Más recientemente, hay un interés por establecer qué deben considerar los programas de formación de profesores de matemáticas sobre la argumentación y cómo involucrar a los profesores en formación o en ejercicio para que logren un aprendizaje significativo sobre estos [2,3,7-9].

Mediante este escrito abordamos el último asunto mencionado. Es así que nuestra pretensión es compartir con la comunidad algunos productos que el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (AEG) de la Universidad Pedagógica Nacional ha logrado al involucrarse en un proceso investigativo de diseño curricular para programas de formación de profesores de matemáticas. En ese marco, asumiendo la sugerencia de [5] sobre la necesidad de precisar la postura conceptual que se adopta para fundamentar investigaciones sobre este constructo (dada la gran variedad de aproximaciones que existen), inicialmente presentamos una breve panorámica, para luego exponer e ilustrar la nuestra. Luego, describimos cómo procuramos convertir este proceso en tema de estudio en el programa de formación inicial de profesores de matemáticas y en el programa de maestría dirigido a profesores de matemáticas, ofertados en la universidad mencionada: en el primero usamos una aproximación metodológica que denominamos “actividad demostrativa” y unas tareas de formación profesional en las que “argumento” y términos relacionados son objeto de estudio; en el segundo, proponemos un plan formativo para profesores en ejercicio. Finalmente, presentamos unos comentarios respecto a cómo el proceso investigativo sobre la formación propuesta llevó a la necesidad de precisar una conceptualización (pensada para procesos educativos en matemáticas) sobre argumento y cómo esto influyó en dicha propuesta.

Dicho lo anterior, consideramos que nuestro principal aporte con esta comunicación de carácter innovador, producto de varios años de investigación, por un lado es una elaboración conceptual sobre argumento y términos que sea operativa en procesos de enseñanza de las matemáticas (por eso, como se verá, sus rasgos discursivos, sociales y estructurales); por otro, maneras innovadoras, tomando de referencia según la consulta en la literatura especializada, de involucrar el estudio de asuntos relativos a la argumentación matemática en procesos formativos de profesores.

Algunas posturas sobre argumentación en Educación Matemática

Como mencionamos antes, en la década del noventa se hace ostensivo el interés de la Educación Matemática por la argumentación. Algunos autores basan ese interés en la importancia de la argumentación para el aprendizaje de las matemáticas (p. ej., [10,11]). Otros, como [12], indican que el creciente interés se basa en que la argumentación comunica el pensamiento humano y, por ende, debe estar presente en los entornos escolares. Por la variedad de asuntos que mueven el interés, hay varias aproximaciones conceptuales a este constructo en los trabajos investigativos.

En [5] por ejemplo, se destacan tres posturas que proporcionan un sistema de referencia con los cuales situar los trabajos sobre argumentación: la de Perelman y Olbrechts-Tyteca [13], la de Toulmin [14] y la de Anscombre y Ducrot [15]. Resumiendo, para Perelman y Olbrechts-Tyteca la argumentación consiste en justificar para convencer; para Toulmin, el énfasis está en justificar aserciones con una cierta estructura que hace referencia a premisas aceptadas en una comunidad; para Anscombre y Ducrot, la argumentación se sitúa en el centro de la actividad discursiva y se enfoca en estructuras gramaticales. Existe una cuarta aproximación, el enfoque pragmadialéctico, propuesto por van Eemeren y Grootendorst [16] usado también por investigadores en Educación Matemática (p. ej., [17,18]). En este enfoque la argumentación es un proceso sociointeractivo dentro de un grupo social específico; es una actividad sociocomunicativa destinada a aumentar (o disminuir) la aceptabilidad de un punto de vista controvertido –de aquí lo dialéctico, pues hay dos puntos de vista–, mediante la presentación de un conjunto de proposiciones destinadas a justificar (o refutar) el punto de vista.

En la Tabla 1 sintetizamos rasgos de trabajos icónicos sobre argumentación en Educación Matemática que ilustran el uso de las posturas mencionadas.

Tabla 1. *Síntesis posturas sobre argumentación*

Perspectiva según	Enfoque teórico	Acepción de Argumentación	Acepción de Argumento	Relación con la demostración
Duval [12]	Perelman	Tipo de razonamiento no deductivo ligado a la justificación o convencimiento de una tesis o pronunciamiento.	Cualquier cosa (hecho, definición, acción, teorema, etc.) usada para justificar o refutar una proposición.	La demostración no tiene relación con la argumentación.
Boero y colegas [2]	Perelman, Toulmin	Proceso que produce un discurso escrito u oral realizado de acuerdo con reglas compartidas, cuyo propósito es llegar a una conclusión mutuamente aceptable sobre una declaración cuyo contenido o verdad está en debate. Texto producido a través del proceso que contiene uno o varios argumentos conectados.	Razón o razones que se dan a favor o en contra de una proposición u opinión.	La demostración es un caso particular de la argumentación.
Krummheuer [10]; Yackel y Cobb [11]	Perelman Toulmin	Proceso que tiene lugar en la interacción social	Resultado de una argumentación.	Argumentos sustanciales (basados en la

semánt i ca) y

		cuando se busca tomar una decisión. Explicación intencional del razonamiento detrás de una solución. Conjunto de técnicas o métodos que permiten establecer una postura sobre una proposición. Es una condición para aprender.		argumentos analíticos (lógico-deductivos). No se precisa si pueden estar relacionados.
Reuter [18]	Toulmin, van Eemeren y Grootendorst	Es una actividad socio-interactiva de naturaleza dialéctica, en la que emergen razones para justificar.	Resultado de una argumentación: discurso compuesto de justificaciones y conclusión.	La deducción puede estar presente en la argumentación, pero no necesariamente.

Fuente: elaborada por los autores tomando de base la propuesta de [5]

Al respecto de las ideas planteadas en la Tabla 1, destacamos tres asuntos que concretan acuerdos y diferencias sobre las maneras de concebir aspectos relacionados con argumentación en la Educación Matemática:

1. Tal como proponen [6], puede haber cierta consonancia en las posturas que consideran a la argumentación en una dimensión social; esto es, como aquello llevado a cabo por un individuo o un grupo para convencer a otros sobre la postura asumida al respecto de una aserción dada. Esta consonancia es consecuencia de la aceptación de la aproximación de Perelman o van Eemeren y Grootendorst.
2. No hay un acuerdo respecto al término empleado para aludir al producto de una argumentación: unos le denominan argumentación (p. ej., Boero y colegas) y otros argumentos (p. ej., Krummheuer).
3. No hay un acuerdo en la relación existente entre argumentaciones de índole lógica-deductiva (p. ej., una demostración) y otras maneras de argumentación. Duval advierte que existe una brecha insalvable, contrario a lo que creen Boero y sus colegas.

Nuestra postura sobre argumentación y demostración en Educación Matemática

Dada la diversidad conceptual sobre argumentación y argumento, y sobre la relación de estos con la demostración, es menester tomar una postura cuando se investiga al respecto o se quieren implementar acciones de enseñanza o aprendizaje sobre ello [5]. El grupo AEG ha procurado precisar definiciones para tales términos con el propósito de establecer una diferenciación entre ellos e indicar lo que consideramos como proceso y como producto. Esta se basa en la propuesta sociocultural-discursiva que para la argumentación sugieren [3] –que asume las ideas de Boero y colegas expuestas en la Tabla 1–; además, usamos la propuesta estructuralista de [14] para caracterizar un argumento.

Consideramos *argumento* como una expresión discursiva expositiva, conforme a normas compartidas, que presenta una aserción y razones que la sustentan. La *aserción* se presenta de una de tres maneras: como una proposición (esto es, una oración de la cual puede decirse que es verdadera o falsa) que afirma o niega una idea; como una oración en la que se plantea una postura; o como una acción física realizada con la que se expresa una idea o una postura. De la idea expuesta interesa sustentar su veracidad; de la postura planteada interesa sustentar su aceptabilidad. Las *razones* se pueden presentar como oraciones (sean o no proposiciones) o como acciones. El conjunto de razones que sustentan la veracidad o la aceptabilidad de una aserción conforman la *justificación* de la aserción.

Usamos la propuesta de [14] para *argumento simple* (la unidad discursiva mínima identificada como argumento), que permite exponer la relación funcional entre los elementos básicos de un argumento: dato, garantía y aserción.

Definimos *argumento simple* como aquel conformado por tres elementos (dato, aserción, garantía) relacionados funcionalmente así: el dato da fundamento a la aserción, es evidencia que apoya la aserción; la garantía sustenta la relación del dato y la aserción, sostiene mediante un enunciado general por qué el dato sirve como evidencia para apoyar la aserción. Con base en la descripción previa, refiriéndose a dato, aserción y garantía, [14] nos dice[6]:

[6] En realidad, Toulmin incluye seis elementos como posibles componentes de un argumento. Los tres ya mencionados –dato, garantía, aserción– y otros tres, respaldo de la garantía, matizadores modales y condiciones de excepción o de refutación. En nuestro estudio nos enfocamos en los tres

Ya disponemos de los términos necesarios para componer el primer esbozo de un esquema para analizar argumentos. Podemos simbolizar la relación entre dato y aserción a la que aquel sirve de sustento con una flecha, e indicar la autoridad que nos permite pasar del dato a la aserción escribiendo la garantía inmediatamente debajo de la flecha (Figura 1).

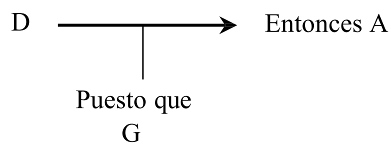

Figura 1. Modelo básico de argumento
Fuente: tomado de [14]

La *estructura funcional de un argumento* se refiere a la disposición esquemática de los tres elementos básicos que conforman un argumento simple, en la que se indican las dos relaciones funcionales antes mencionadas. Un *argumento global* es el argumento que está conformado por una cadena de argumentos simples que expone el sustento de la aserción principal. Un *argumento matemático* (simple o global) es un argumento que surge durante alguna actividad relevante en la práctica matemática (p. ej. generalizar, visualizar, explorar, representar, clasificar), en el que la aserción versa sobre un objeto matemático (e. g., propiedades o relaciones entre propiedades); las razones aducidas pueden referirse o no a condiciones de índole matemática.

Con las definiciones previas, tenemos insumo para exponer lo que entendemos por *argumentación*; este es un proceso discursivo y sociocultural destinado a aumentar (o disminuir) la aceptabilidad de un punto de vista o a determinar la veracidad de una idea mediante la presentación de un conjunto de proposiciones o acciones destinadas a justificar (o refutar) el punto de vista. En dicho proceso surgen argumentos. Ejemplo para ilustrar la conceptualización de argumento

primeros. Para una documentación amplia del tema recomendamos la lectura del capítulo *La forma de los argumentos* del libro *Los usos de la argumentación*, traducción que María Morrás y Victoria Pineda hacen del libro de Toulmin [14].

Para ilustrar la conceptualización de argumento, pensemos en el siguiente contexto. Dos estudiantes interactúan para resolver el problema cuyo enunciado es: En la Figura 2, $m\angle ABC = 57°$ y $\angle ABC \cong \angle BDE$. ¿Por qué la $\overleftrightarrow{BD}$ no es perpendicular a la $\overleftrightarrow{DE}$?

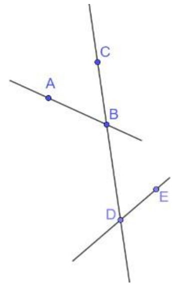

Figura 2. Representación de la situación sobre la que surge una interacción
Fuente: elaborada por los autores

A continuación, presentamos respuestas de dos estudiantes:

Estudiante A: Pues… la figura lo muestra así, miren las esquinas… no forman una cruz.

Estudiante B: i) Al ser congruente el ángulo BDE al ángulo ABC, miden lo mismo, es decir 57, ya que ángulos congruentes tienen la misma medida. ii) Como el ángulo $[BDE]$ mide 57, el ángulo BDE no es recto; para ser rectos, tienen que medir 90.

Indicamos la presencia de tres argumentos, uno del estudiante A y los otros del estudiante B. Los reconstruimos usando la estructura funcional propuesta por Toulmin[7]. La aserción del argumento producido por el estudiante A es "$\overleftrightarrow{BD}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{DE}$"; el dato reconstruido es "La figura no indica una cruz en D"; la garantía, no pronunciada explícitamente,

[7] Nuestros esquemas funcionales para reconstruir argumentos van a tener las siguientes convenciones, basadas en lo que proponen al respecto Fuente especificada no válida.: el dato se presenta en marco rectangular con esquinas redondeadas, la aserción/conclusión en marco rectangular, la garantía en marco rectangular con esquinas anguladas, el respaldo en marco rectangular con esquinas anguladas ubicado debajo del que presenta la garantía y conectado con este por una línea. Además, la línea gruesa de un marco indica que tal elemento del argumento es el inferido, y la línea discontinua (guiones) de un marco indica que tal elemento no es explícito. Vale indicar que los esquemas propuestos no solo reportan el argumento mismo, sino que vislumbrar una huella de la argumentación llevada a cabo; esto por cuanto resalta aquello que es inferido durante el proceso y precisa si la garantía se produjo implícitamente o no. Una caracterización de los tipos de argumento y el esquema relativo a cada uno de ellos, permiten dar un mejor sentido esta aclaración. Ello se explica en la sección siguiente.

se puede reconstruir como "Si dos rectas son perpendiculares, la representación gráfica asociada debe indicar una cruz". La Figura 3 muestra el esquema correspondiente. En lo que respecta al discurso del estudiante B, reconstruimos dos argumentos, uno asociado a la expresión i) y otro a la expresión ii). Para el primero, la aserción es "los ángulos ABC y BDE miden lo mismo, es decir 57"; el dato es "el ángulo BDE es congruente al ángulo ABC"; y la garantía explícita es "los ángulos congruentes tienen la misma medida". Para el segundo, se toma como dato, la aserción del argumento inmediatamente anterior: "el ángulo BDE mide 57", para soportar la aserción "el ángulo BDE no es recto", usando como garantía que "los ángulos rectos tienen que medir 90" (claro, al tener que el ángulo BDE no es recto, puede concluir que las rectas dadas no son perpendiculares). Las Figuras 4 y 5 exponen los esquemas correspondientes a estos argumentos.

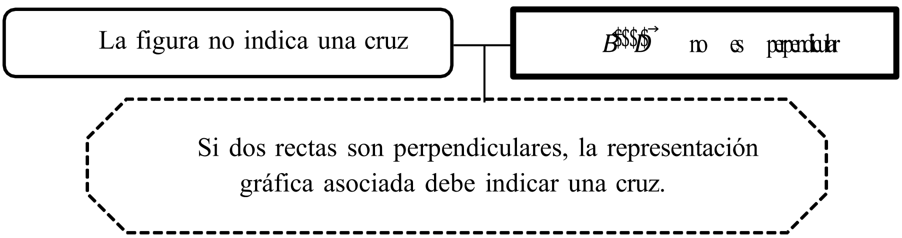

Figura 3. Esquema del argumento producido por el Estudiante A
Fuente: elaborada por los autores

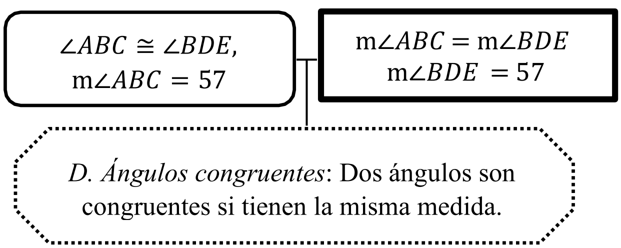

Figura 4. Esquema del primer argumento producido por el Estudiante B
Fuente: elaborada por los autores

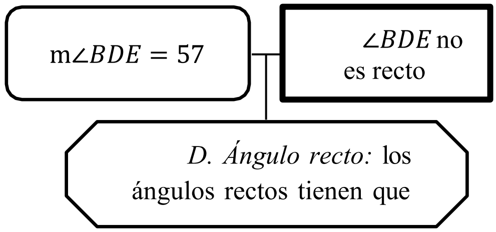

Figura 5. Esquema del segundo argumento producido por el Estudiante B
Fuente: elaborada por los autores

Se podría pensar que el argumento pronunciado por el Estudiante A no es aceptable dado que usa como garantía una convención para la representación gráfica de dos rectas perpendiculares. Pero la aceptabilidad o no del argumento depende de las normas compartidas en la comunidad en la que este se esgrime. Si se expone, por ejemplo, en un aula de primaria, es posible que este argumento se acepte, por cuanto podría ser una norma de la clase apoyarse en representaciones gráficas o datos empíricos (basados en la percepción) para sustentar ideas. Ahora bien, si el mismo argumento se expone en un aula universitaria, inclusive de secundaria, es posible que este no fuera aceptable, porque podría ser norma usar hechos de la geometría para soportar aserciones. Los argumentos del estudiante B, en ese ámbito, serían aceptables.

TIPOS DE ARGUMENTACIÓN Y TIPOLOGÍA ASOCIADA DE ARGUMENTO

Presentamos, ahora, nuestra propuesta de tipos de argumentos siguiendo una idea análoga a la de [19]. Tal como se expuso en la definición de argumento simple, los tres elementos básicos que lo componen tienen una relación funcional que es siempre la misma. Al tener en cuenta el curso de una argumentación específica, más precisamente, cuál de los elementos del argumento simple principal producido se infiere, y cuál de los elementos se da por sentado, es posible reconocer tres situaciones argumentativas diferentes, que denominamos argumentación inductiva, argumentación abductiva y argumentación deductiva. Abusando del lenguaje podemos establecer una tipificación de argumento que atiende al tipo de argumentación en el que surge. En la metodología se sugiere que los autores describan el método, los instrumentos y los sujetos de estudio con suficiente detalle para permitir que otros repliquen su estudio o se basen en los resultados publicados. Esta sección se puede dividir en subsecciones.

Argumentación y argumento inductivos

En la *argumentación inductiva* se cuenta con información en calidad de dato –que se acepta como verdadera–, con base en la cual se infiere un patrón de generalidad que posibilita la inferencia de una aserción; en ambos casos se trata de una inferencia plausible o probable. El rasgo clave de este tipo de argumentación es el establecimiento de un patrón de generalidad a partir de la información que proporciona el dato. Para propiciar una argumentación inductiva, el enunciado de la tarea que se plantee a los estudiantes debe permitirles determinar un conjunto referencial y contar con una información sobre algunos elementos del referencial, en calidad de dato; la solicitud debe invitarlos a inferir información sobre otros elementos del referencial, no considerados en el dato, en relación con el atributo al que alude el dato. En síntesis, un argumento simple inductivo puede ser enunciado de la siguiente forma:

> Los elementos de A tienen el atributo p, *algunos* elementos de A tienen el atributo q, de *otros* elementos de A, no se sabe si tienen el atributo q, por lo tanto, al menos *otro* elemento de A también tiene el atributo q puesto que *los* elementos de A tienen el atributo q.

El esquema expuesto en la Figura 6 representa no solo la estructura funcional del argumento inductivo caracterizado, sino que también resalta los elementos que fueron inferidos en el curso de la argumentación en el que surgió el argumento.

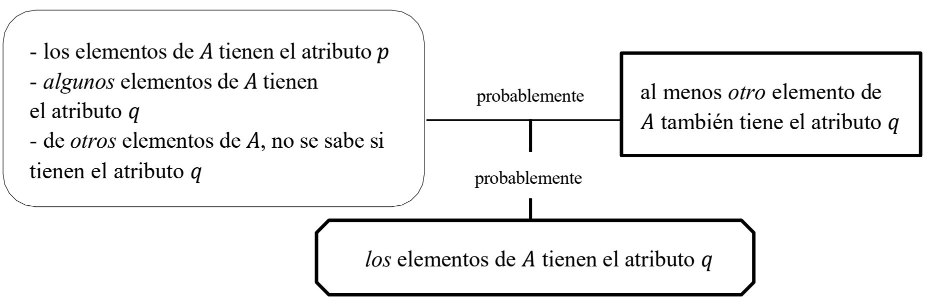

Figura 6. Esquema de argumento inductivo
Fuente: elaborada por los autores

Para ejemplificar este tipo de argumento, consideremos el siguiente problema: Sean tres puntos no colineales A, B y C. Sea m la recta perpendicular al $\overline{AB}$ por su punto medio y n la recta perpendicular al $\overline{BC}$ por su punto medio. Sea T el punto de intersección de m y n. ¿Qué característica geométrica tiene el punto T al mover el punto B?

Unas estudiantes representan la situación en un entorno de geometría dinámica –EGD– (GeoGebra, por ejemplo) y la exploran empíricamente, moviendo el punto B por varios lugares de la pantalla; usan la herramienta "Rastro" del EGD para el punto T. Esta acción las lleva a ver que, cuando se mueve B, la trayectoria de T es una recta; explicitan el atributo geométrico del punto T: para cualquier punto B en ese plano se cumple que la intersección de las rectas m y n (T) siempre pertenecería a la mediatriz del $\overline{AC}$ (Figura 7).

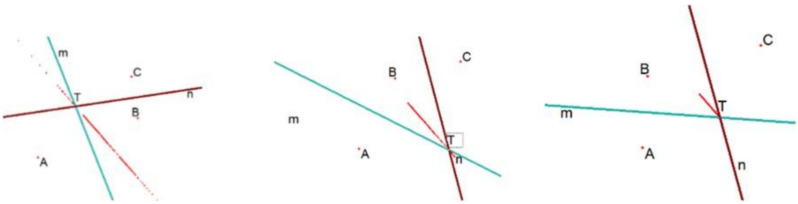

Figura 7. Representación gráfica que ilustra la exploración que origina un argumento inductivo
Fuente: elaborada por los autores

Apoyadas en el EGD, con el arrastre continuo y breve del punto B, las estudiantes determinan un subconjunto de puntos T generados simultáneamente con el movimiento del punto B que dependen de este. Concluyen que el rastro que dejan los elementos de este subconjunto es un segmento de recta. Hasta aquí, ellas han conseguido un dato de nivel particular que se puede reconstruir como sigue: para algunos puntos B del plano, los puntos T correspondientes hacen parte de un determinado subconjunto de recta. Esto las conduce a proponer una aserción fundamentada mediante una inducción. Representamos lo dicho en el siguiente esquema de Toulmin (Figura 8):

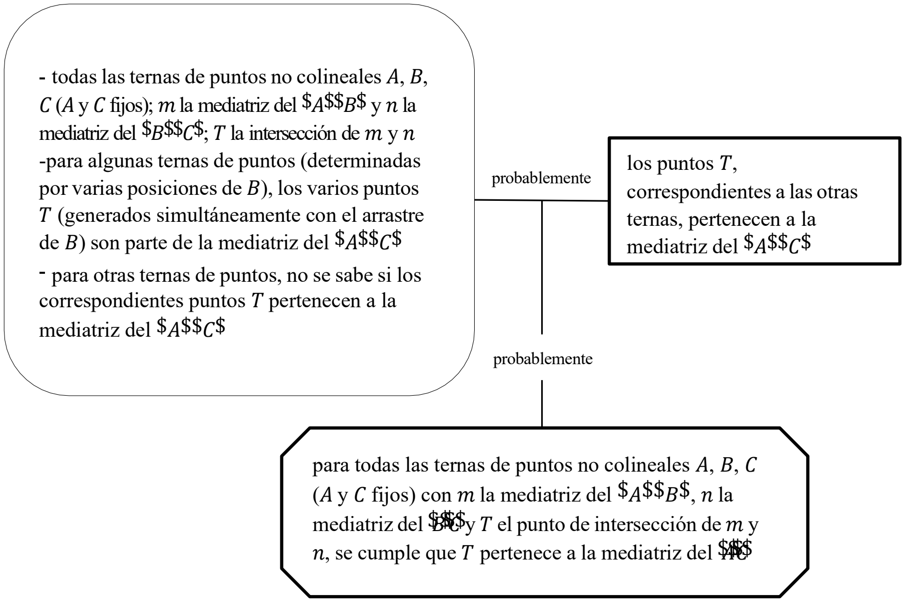

Figura 8. Esquema del argumento inductivo asociado a la exploración
Fuente: elaborada por los autores

Argumentación y argumento abductivos

En la *argumentación abductiva* se cuenta con una aserción que se asume como verdadera o aceptable; el dato es el elemento que se infiere con la intención de aportar una razón que soporte la veracidad de la aserción, tomando de base una regla general que se crea o que se sabe es verdadera; el dato inferido es plausible o probable. Es rasgo clave de este tipo de argumentación el establecimiento de un dato o de un dato y una garantía que podrían sustentar la aserción. Para propiciar una argumentación abductiva, el enunciado de la tarea propuesta a los estudiantes debe permitirles contar con información en calidad de aserción para la cual se busca una posible razón; la solicitud debe invitarlos a inferir información extraída del conocimiento de referencia o creada que posiblemente sustente la aserción.

Los esquemas expuestos en las Figuras 9 y 10 representan la estructura funcional de sendos argumentos abductivos y representan dos detalles de la argumentación en la que surgieron los argumentos. En el primer argumento se conoce la regla general, es decir, hace parte del conocimiento de referencia[8]. En el segundo argumento no se tiene la regla general; la garantía es una proposición cuyo valor de verdad no se ha determinado, pero el argumentador la asume como verdadera.

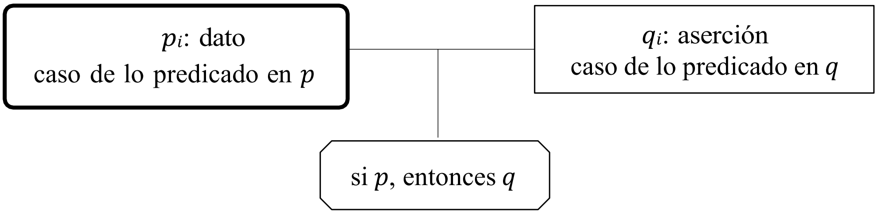

Figura 9. Esquema del argumento abductivo teórico
Fuente: elaborada por los autores

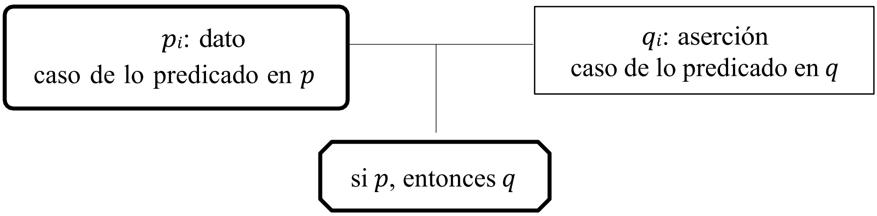

Figura 10. Esquema del argumento abductivo creativo
Fuente: elaborada por los autores

Para ilustrar lo anterior, veamos el siguiente ejemplo. A un grupo de estudiantes se les plantea que como un hecho observado se cuenta que dos segmentos son congruentes. Se les pregunta, de qué puede depender ello. Dos estudiantes responden:

Estudiante A: puede depender de que los segmentos sean segmentos radiales de una misma circunferencia, porque sabemos que,

[8] Desde un punto de vista lógico, tanto el dato como la garantía no son inferencias necesarias, pues el esquema correspondiente al argumento no es una tautología; sin embargo, para el argumentador este hecho no necesariamente hace parte de su conocimiento; en consecuencia, puede darse el caso de que, para él, tales inferencias sí sean consideradas como necesarias. También puede suceder el caso de que el dato que se infiere sí sea evidencia (empírica o teórica) que sustenta a la aserción (p. ej., que, al contar con el dato, se siga la aserción); sin embargo, por la misma razón anterior (la estructura lógica del argumento abductivo no es una tautología), tampoco en este caso el dato debería considerarse como una inferencia necesaria.

en una circunferencia, si los segmentos son radios de tal circunferencia, entonces los segmentos son congruentes.

Estudiante B: los segmentos pueden ser cuerdas equidistantes del centro de una circunferencia dada. Es que creo que si dos segmentos son cuerdas de una circunferencia que equidistan del centro de la circunferencia, entonces los segmentos son congruentes.

En este escenario, cualquiera que sea la inferencia hecha no es posible tener total certidumbre de que efectivamente esa sea la condición para el caso particular que se está considerando. El Estudiante A, infiere que quizá "los segmentos son radiales de una misma circunferencia"; conoce y usa el enunciado "Dada la circunferencia de centro, si los segmentos son radios de tal circunferencia, entonces segmentos son congruentes", el cual sería la garantía evocada de la cual infiere el dato; en tal caso, la garantía sería teórica. Reconocemos que él conoce tal enunciado pues utiliza la expresión "sabemos" antes de decirla. El Estudiante B infiere que "los segmentos podrían tener la misma distancia al centro de la circunferencia de la cual son cuerdas". El uso de la expresión "creo" nos permite pensar que el estudiante creó, en el curso de la argumentación, la garantía; en tal caso, esta sería creativa. La Figura 11 expone el esquema para el argumento abductivo asumiendo la respuesta del estudiante A; la Figura 12 presenta lo correspondiente para el Estudiante B.

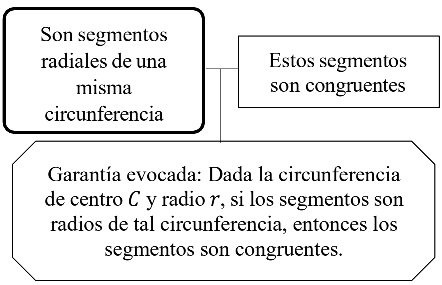

Figura 11. Esquema para ejemplo de argumento abductivo teórico
Fuente: elaborada por los autores

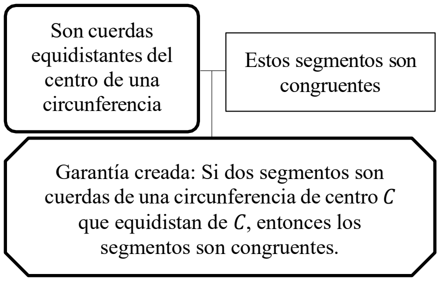

Figura 12. Esquema para ejemplo de argumento abductivo creativo
Fuente: elaborada por los autores

Argumentación y argumento deductivos

En la *argumentación deductiva* desde el inicio se cuenta con dos tipos de información, ambas consideradas verdaderas: una regla general y un dato (caso particular de lo que versa el antecedente de la regla general). Con base en esta información se infiere como consecuencia necesaria la aserción que predica sobre el mismo caso al que alude el dato. Para propiciar una argumentación deductiva, el enunciado de la tarea que se plantee a los estudiantes debe permitirles contar con una información en calidad de dato y una regla general que hace parte del conocimiento de referencia; la solicitud debe invitarlos a inferir nueva información (aserción). El esquema expuesto en la Figura 13 representa la estructura funcional de un argumento deductivo. Como ejemplos de este tipo de argumentos, se pueden citar todos los expuestos en la sección en la expusimos y ejemplificamos nuestra postura sobre argumentación.

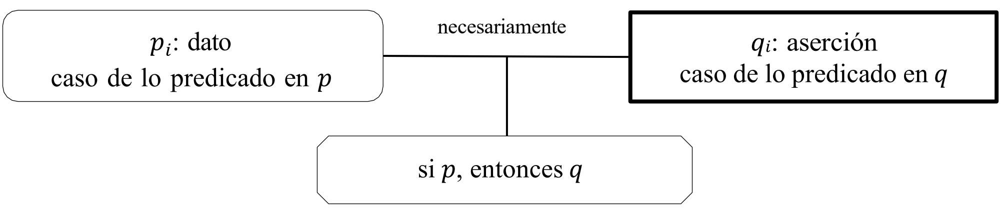

Figura 13. Esquema de argumento deductivo
Fuente: elaborada por los autores

Caracterizamos una *demostración* como un tipo de argumento global en el que cada uno de los argumentos simples que lo conforman son argumentos deductivos aceptados por la comunidad de matemáticos y concatenados de una manera aceptada por esa comunidad (el dato de un paso diferente al primero es la aserción de un paso previo o una conjunción de aserciones de pasos anteriores).

PROPUESTAS DE FORMACIÓN DE PROFESORES SOBRE EL PROCESO DE ARGUMENTACIÓN

En los ejercicios académicos e investigativos del grupo AEG, además de la precisión ganada sobre argumento, argumentación y demostración, hemos desarrollado en los programas de formación inicial y continua de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, dos propuestas de formación sobre el proceso de argumentación. En esta sección describimos los rasgos clave de cada una. De la relativa a la formación inicial describimos los dos momentos que la conforman: uno que busca que los estudiantes vivan actividad matemática que involucre argumentación y otro que busca que ellos reflexionen sobre esa actividad al punto de convertir aspectos de la argumentación en objetos de estudio. Con respecto a la formación continuada describimos, *grosso modo*, un plan de formación para profesores en ejercicio, estructurado a partir de aspectos del conocimiento didáctico y matemático del profesor, para apoyarlos en la tarea de impulsar en sus aulas ambientes de aprendizaje que contribuyan a hacer realidad las metas educativas propuestas sobre los procesos de argumentación y demostración.

PROPUESTA PARA LA FORMACIÓN INICIAL

Distinguimos dos momentos clave durante la formación inicial de profesores que pretenden promover la argumentación en los estudiantes. Uno, con en el que pretendemos que ellos vivan actividad matemática rica (resuelvan problemas, representen, exploren, conjeturen, etc.) en la que el proceso de argumentación y la explicitación de argumentos es protagonista. Otro, con el que pretendemos que reflexionen sobre esos procesos vividos, estudien el proceso de argumentación y asuntos relacionados (p. ej., argumento, estructura de un argumento, tipos de argumento) y el diseño de tareas que promuevan la argumentación. A continuación, detallamos los rasgos de cada momento.

Primer momento. Entorno favorable para promover actividad argumentativa

En los cuatro cursos de geometría (ubicados, respectivamente, en los cuatro primeros semestres de la carrera) asumimos como un eje principal el proceso de argumentación matemática. Destacamos tres elementos sobre los que recae nuestro esfuerzo didáctico innovador para generar un entorno favorable para aprender a argumentar: tareas matemáticas, la interacción social en la clase y el uso de entornos de geometría dinámica.

Tareas matemáticas que se proponen a los estudiantes: Las tareas son elemento central de la innovación y objeto de un cuidadoso diseño por parte del grupo de investigación. Específicamente se procura que sean *interesantes* (la información presentada en el enunciado genera duda, curiosidad, incertidumbre, perturbación o controversia y la necesidad de resolverlas), para generar diversos puntos de vista y favorecer la argumentación y *pertinentes*, para propiciar una experiencia sistemática de trabajo dentro de un sistema teórico que se va conformando paulatinamente. Por lo anterior, las tareas incluyen generalmente problemas abiertos, procurando reducir las tareas de tipo "Demuestre/Justifique que…". Estas tareas no se proponen esporádicamente ni tampoco con el propósito de complementar o aplicar lo que se hace en el curso; son, en cambio, parte central del medio didáctico usual que organiza el profesor para el aprendizaje de los estudiantes. Es decir, para favorecer el proceso de argumentación, pretendemos que los problemas propicien exploración empírica (con artefactos digitales), para comprender la situación, encontrar regularidades, formular conjeturas y producir sus justificaciones.

Consideramos que esta forma de gestionar el contenido es uno de los elementos de la innovación que desafían de manera más fuerte la tradición de la matemática escolar y universitaria que propende hacia la presentación de los contenidos organizada en términos de relaciones establecidas desde el saber matemático y no desde el punto de vista de la construcción del conocimiento de los estudiantes. Ejemplos de tareas pueden ser consultados en [20-22] el problema usado en la sección 4.1 es ejemplo de esta clase de problemas.

Interacción social en la clase: Formular una conjetura o proferir una idea de la que se está más o menos convencido no es suficiente para emprender el proceso de argumentación. Por ello, la interacción social en el aula entre profesor y estudiantes y entre estudiantes es un factor imprescindible del aprender a producir argumentos. Esto porque es en la comunicación de ideas, en el análisis crítico de estas, en la discusión colectiva donde surgen los elementos necesarios para construir argumentos y se comprende el papel que juegan dichos argumentos en la actividad matemática. El papel del profesor como guía de la interacción es fundamental pues es él –como experto de la comunidad de la clase– quien puede dirigir el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propios de la práctica de la argumentación en matemáticas. A través de la interacción social, los estudiantes pueden cambiar la tradicional relación que tienen con el conocimiento, con su profesor y con sus compañeros. Con respecto al conocimiento, pueden llegar a comprender que más que conocer la estructura de un sistema teórico, tienen que vivir la experiencia de conformarlo en colaboración con los demás miembros de la comunidad. Con respecto al profesor, pueden dejar de considerarlo como la autoridad en la clase y la única persona que tiene el saber, y en cambio pueden verlo como el miembro experto de la comunidad que guía el proceso. Con respecto a los otros estudiantes, pueden llegar a establecer un compromiso mutuo de trabajar en pro de la conformación del sistema teórico.

Al iniciar el curso, el profesor hace explícitas las normas sociales y sociomatemáticas [11] relacionadas con la exigencia de justificar todas las ideas, escuchar la argumentación del otro y producir justificaciones de acuerdo con parámetros establecidos. También controla de manera sistemática el cumplimiento de tales normas, cuestión de la que eventualmente se responsabilizan los estudiantes. Ejemplos de las normas que se instalan en los cursos se pueden ver en [23,22].

El papel de programas de geometría dinámica: El tercer elemento de la aproximación metodológica es el uso de programas de geometría dinámica como herramientas de mediación en el proceso de aprender a producir argumentos. Siguiendo a muchos investigadores en el campo (p. ej., [24-26]), afirmamos que, si vinculamos las tareas de construcción geométrica con el proceso de argumentación, incrementamos la posibilidad de aprender a producir argumentos y desarrollar conciencia de la necesidad de promover explícitamente dicho proceso.

El uso de programas de geometría dinámica media en varios asuntos que son de importancia fundamental en el proceso de argumentación [20,21]. Dado que los principios presentes en el diseño de estos programas se corresponden esencialmente con los postulados de la geometría euclidiana, por medio de ellos es posible establecer conjeturas, sobre propiedades invariantes bajo el arrastre, con un alto grado de probabilidad de que ellas sean verdaderas en el sistema teórico Algunos usos que hacemos de programas de geometría dinámica son: (i) interpretar que el cumplimiento de la tesis de un enunciado “si… entonces…” depende de todas las condiciones de la hipótesis; (ii) propiciar la creatividad, a través de construcciones auxiliares, para elaborar argumentos; (iii) crear situaciones que dan lugar a suficientes resultados para ir conformando una porción del sistema teórico; (iv) corroborar las conjeturas formuladas por otros; (v) interpretar el desarrollo lógico de una demostración; (vi) descubrir relaciones geométricas entre las partes de figuras, que se podrían involucrar en la demostración.

Segundo momento. Espacio de reflexión sobre la experiencia vivida alrededor del proceso de argumentación

Desde el año 2020 estamos inmersos en un proceso de investigación encaminado al diseño curricular para que los estudiantes, luego de la experiencia vivida en el ambiente descrito en la sección previa, tengan la oportunidad de abordar como objeto de estudio la argumentación y asuntos relacionados procurando seguir, principalmente, los presupuestos de la faceta epistémica de la dimensión didáctica del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor (CDM) propuesto por el Enfoque Onto- Semiótico [27] (p. ej., argumento, estructura de un argumento, tipos de argumento) y se involucren en el diseño de tareas que promuevan la argumentación. La propuesta curricular diseñada consta de cuatro secuencias didácticas –que se implementan en un curso de didáctica de la geometría ubicado en quinto semestre– cada una de las cuales tiene una intención didáctica clara y un tema bien delimitado. A grandes rasgos, en la Tabla 2, presentamos la trayectoria de enseñanza que estructura nuestra propuesta.

Tabla 2. *Trayectoria de enseñanza para tematizar el objeto argumento*

Secuencia didáctica 1 Reconocer concepciones	Los estudiantes utilizan su conocimiento sobre argumento, lo explicitan y reconocen lo que saben al respecto. Para ello solucionan en grupos pequeños un problema geométrico; posteriormente analizan sus intervenciones durante la solución del problema para identificar argumentos producidos. Deben trascribir sus argumentos, exponer por qué lo son y explicitar el propósito de cada argumento.

Secuencia didáctica 2 Construir conocimiento sobre argumento **Secuencia didáctica 3** Construir conocimiento sobre tipos de argumento (inductivo, abductivo y deductivo)	Los estudiantes avanzan en su conceptualización relativa a argumento (p. ej., avanzan en vocabulario especializado). Para ello leen textos específicos, donde se encuentran los significados que proponemos, e interpretan dichos significados para responder preguntas formuladas respecto a los textos, reconociendo y explicitando asuntos sobre los que se requiere hacer claridad, etc. Además, los estudiantes deben involucrar conocimiento informado (ya institucionalizado) sobre argumento (o tipos de argumentos) y reflexionan sobre este con miras a ampliarlo, profundizarlo o cuestionarlo. Para ello se les pide analizar, en grupos pequeños, algunos fragmentos de interacciones comunicativas de dos estudiantes que resuelven un problema de conjeturación.
Secuencia didáctica 4 Promover el diseño de tareas de argumentación	Los estudiantes se sensibilizan sobre la importancia de formular cuidadosamente los enunciados de las tareas que diseñan, dado que estos influyen notoriamente en la posible actividad matemática que se espera que hagan los alumnos. Además, establecen criterios para la elaboración de enunciados de tareas que favorezcan la producción de argumentos no necesariamente deductivos.

Fuente: elaborada por los autores

Mediante la Tabla 3, ilustramos este segundo momento de la formación inicial con dos bloques de tareas que corresponden a las secuencias didácticas 2 y 4.

Tabla 3. *Ejemplo de tareas para la formación profesional sobre argumento Trayectoria de enseñanza para tematizar el objeto argumento*

Secuencia 2: Tarea para promover el conocimiento sobre argumento
Vamos a usar la siguiente definición de argumento: Argumento es una expresión discursiva escrita u oral regulada por normas compartidas, que expone una postura o una proposición y las razones (justificación) que sustentan, respectivamente, el acuerdo con la postura o el valor de verdad de la proposición. 1. Para cada una de las siguientes actividades, haz una especulación basada en los rasgos que caracterizan a un argumento, según la definición dada, con miras a determinar si el posible discurso podría ser un argumento. Es fundamental que expliques tus respuestas: a) Presentar una definición b) Plantear una pregunta

c) Relatar una secuencia de hechos ocurridos en un intercambio en una clase
d) Hacer una demostración en clase de geometría
e) Usar la definición de cuadrado para determinar si un caso particular es cuadrado

2. En la definición de argumento, se alude a una expresión discursiva "regulada por normas compartidas". En tu opinión, ¿a qué normas pueden estar refiriéndose?
3. Con base en la experiencia vivida en los espacios académicos Elementos de Geometría y Geometría Plana, ¿qué normas compartidas guían la producción de argumentos en la clase? ¿Hay algún cambio de reglas del primer curso al segundo?
4. En la definición se dice que un argumento expone una postura o una proposición y las razones (justificación) que sustentan el acuerdo con la postura o el valor de verdad de la proposición. Presenta dos ejemplos de argumento; uno que exponga una postura y su justificación, y otro que exponga una proposición y su justificación.

Secuencia 4: Tarea para promover el diseño de tareas de argumentación

Si un trapecio es isósceles, entonces las mediatrices de los lados paralelos coinciden.

El enunciado anterior es un teorema de la geometría euclidiana, que te servirá de contexto geométrico para diseñar tres tareas para un curso de Geometría Plana. Las tareas deben: (i) propiciar el surgimiento de argumentos (es decir, resolver el problema debe ofrecer la posibilidad de argumentar) y (ii) promover la explicitación de argumentos (es decir, cumplir las indicaciones dadas en las instrucciones de la tarea debe impulsar al resolutor a argumentar).

1. Diseña una tarea que (i) incluya un problema que propicie principalmente el surgimiento de un argumento deductivo y (ii) promueva la explicitación del argumento.
2. Diseña una tarea que (i) incluya un problema que propicie principalmente el surgimiento de un argumento abductivo y (ii) promueva la explicitación del argumento.
3. Diseña una tarea que (i) incluya un problema que propicie principalmente el surgimiento de un argumento inductivo y (ii) promueva la explicitación del argumento.

Fuente: elaborada por los autores

FORMACIÓN CONTINUADA DE PROFESORES SOBRE LA ARGUMENTACIÓN

En esta sección nos referimos a la propuesta de formación continuada, que concretamos en una cohorte del programa de Maestría en Docencia de la Matemática (MDM), el cual tiene una duración de dos años. La apuesta formativa apunta, en general, a promover un cambio en la práctica profesional del profesor de matemáticas en ejercicio, fruto de la transformación de su conocimiento didáctico matemático. Para lograrlo, cada profesor-estudiante convierte en objeto de estudio su conocimiento profesional, sobre algún objeto o proceso (matemático o discursivo). En la cohorte 2020 el asunto específico fue el proceso de argumentación, enmarcado en la práctica relativa a cómo promoverlo en aulas escolares a través de tareas.

El plan de estudios de la MDM integra cursos organizados en dos componentes: de fundamentación y de investigación. Los cursos del primero abordan aspectos conceptuales fundamentales de la Didáctica de las Matemáticas centrados en el objeto de estudio que se asume como protagonista de la cohorte (en cursos obligatorios y electivos). Los cursos electivos son seleccionados por el equipo docente a cargo de la cohorte entre un abanico que ofrece la MDM y el Sistema de Formación Avanzada de la Universidad. Los cursos del segundo están destinados al desarrollo de competencias investigativas, ajustadas también, al objeto de estudio que es protagonista. A continuación, describimos los dos tipos de cursos, adaptados según el objeto argumentación.

Cursos del componente de fundamentación

Para organizar el contenido de los cursos de fundamentación relativos a la argumentación, usamos rasgos clave de algunas facetas de la dimensión didáctica del modelo CDM. En la Tabla 4 sintetizamos la relación entre los cursos de la MDM ofertados y las facetas del modelo CDM correspondientes.

Tabla 4. *Cursos para el componente de fundamentación y relación con el CDM*

Curso	**Tipo de crédito**	**Faceta del CDM**	**Asuntos del CDM sobre argumentación estudiados en el curso**
Fundamentos de matemáticas elementales	Obligatorio	Epistémica	Definición de argumento; elementos de un argumento; tipos de argumento (según lo expuesto en las secciones 3 y 4 de este artículo). Identificación y explicitación de diferentes argumentos que pueden promover situaciones problema específicos con su respectiva tipificación.

Diseño y Desarrollo Curricular	Obligatorio	Epistémica	Relaciones entre tipos de argumentos y tipos de problema; criterios para diseñar tareas de argumentación matemática.
		Ecológica	Tipos de argumentos que se pretenden abordar a nivel escolar según políticas curriculares nacionales o institucionales.
		Cognitiva	Principales dificultades de los estudiantes con la argumentación o demostración; principales errores de los estudiantes al producir argumentos o demostraciones.
Tecnología en ciencias y matemáticas	Electivo	Mediacional	Formas en que los entornos de geometría dinámica favorecen la producción de argumentos para soportar conjeturas.
Didáctica de la matemática	Obligatorio	Epistémica Interaccional	La argumentación como línea de investigación en el campo de la Educación Matemática Investigadores cuyo trabajo es e identificación de sus posturas respecto a la argumentación y las maneras como proponen gestionar clases para favorecer actividad argumentativa.

Fuente: elaborada por los autores

Cursos del componente de investigación

Mediante los cursos del componente de investigación, el profesor- estudiante adquiere las herramientas necesarias para sistematizar su conocimiento sobre argumentación y analizar si hubo cambios, fruto del proceso de formación. En cuatro cursos, los estudiantes ganan fundamentos de investigación y recaban información con la cual construyen los datos de investigación, e identifican y proponen herramientas teóricas y metodológicas para identificar y caracterizar su conocimiento sobre argumentación y analizan la transformación de este. La Tabla 5 presenta una breve descripción de los cursos de este componente.

Tabla 5. *Cursos para el componente de investigación*

Curso	Tipos de créditos	Asunto	Aportes al desarrollo del trabajo de grado
Innovación/ Investigación	Obligatorio	Planteamiento del problema	Formulación del problema de investigación y de la pregunta que moviliza la investigación referida a su conocimiento sobre argumentación. Elaboración de propuesta de objetivos, justificación del trabajo, presentación de algunos antecedentes y esbozo del marco de referencia.
La educación del profesor de ciencias o matemáticas como campo de investigación	Electivo	Marco de referencia analítico	Modelo del conocimiento del conocimiento del profesor de matemáticas propuesto por el EOS (CDM), como referente teórico y analítico. Indicadores para precisar la dimensión o faceta en la que se pueden ubicar piezas de conocimiento del profesor cuando resuelve un problema abierto de conjeturación o diseña tareas que favorezcan la argumentación en el aula.
Investigación en Educación Matemática	Investigación	Asuntos relativos a la estrategia investigativa	Descripción de la estrategia investigativa señalando características, participantes, roles, ciclos y fases.
Construcción de categorías para micro - análisis del aprendizaje	Investigación	Asuntos relativos a la estrategia investigativa	Construcción de un modelo analítico para caracterizar el conocimiento didáctico del profesor respecto a argumentación y posibles transformaciones fruto del proceso de formación.

Fuente: elaborada por los autores

Sobre el Trabajo de Grado

La indagación que se desarrolla en el trabajo de grado parte del reconocimiento de la necesidad de promover un cambio en el conocimiento didáctico matemático de los profesores – estudiantes sobre argumentación y sigue con la identificación de una ruta para impulsar transformaciones de este durante el periodo de formación en el programa de maestría. La identificación de su conocimiento inicial, la reflexión sobre este, el análisis del avance alcanzado en algunos momentos del proceso y el estudio de las posibles transformaciones más significativas constituyen el trabajo de grado.

Aunque todos los trabajos de grado asumen el mismo objeto de estudio, en cada trabajo se abordan especificidades sobre el conocimiento didáctico matemático acerca de la argumentación, que lo diferencian de los demás; esto se da por circunstancias e intereses particulares del desarrollo de los trabajos. Por ejemplo, en la cohorte 2020 algunos trabajos de grado se enfocaron en: la argumentación abductiva, la argumentación por analogía, la relación entre argumentar y definir, y las relaciones entre argumentar y explorar.

El asesor del trabajo de grado es un profesor del equipo responsable del proceso de formación. Acompaña a los estudiantes en el proceso de indagación, orienta la caracterización del conocimiento que será el punto de partida, guía la planeación y realización de acciones para revisar, fundamentar y ampliar el conocimiento didáctico matemático y apoya a los estudiantes bajo su dirección en el proceso reflexivo y analítico para identificar transformaciones de su conocimiento. Una estrategia que fue útil en la experiencia vivida en 2020 es la dinamización, por parte del asesor, de rutinas de pensamiento para apoyar la reflexión, Estas favorecen la auto- examinación, tomando distancia o evocando información, para expresar pensamientos acerca de su conocimiento haciéndolos tangibles y susceptibles de análisis. Ejemplos de estas rutinas son: antes pensaba, ahora pienso; qué no aclaré, qué aclaré, qué inquietud me surgió.

El documento que los estudiantes elaboran, como producto del desarrollo del trabajo de grado, contiene la descripción y el análisis de resultados del proceso vivido desde el momento en el que se identifica el asunto específico sobre el que centra el estudio del conocimiento didáctico matemático, hasta la culminación del ejercicio reflexivo, al término de los estudios de maestría. Ello implica que la información proviene de las acciones promovidas en el programa y de acciones individuales o colectivas, extra-clase, pensadas de manera autónoma o con el apoyo del asesor, para ahondar en el conocimiento didáctico matemático.

Sugerimos como estrategia la investigación-acción, según en enfoque sugerido por [28]. Esta es una forma de indagación autorreflexiva que emprende un conjunto de personas que llevan a cabo una práctica social, con el fin de mejorar la racionalidad o entendimiento de esta, optimizar la misma práctica, atendiendo situaciones poco satisfactorias, e incluso lograr situaciones más equitativas y justas respecto de ella. No necesariamente implica un trabajo directo sobre los aspectos prácticos del desempeño del profesor sino ejercicios de refinamiento de los fundamentos teóricos de dicha práctica. Esto porque es posible lograr la transformación de una práctica fundamentándola y conceptualizándola.

Un rasgo que caracteriza la estrategia es su sentido cíclico. La investigación se adelanta en ciclos de indagación de tal manera que las acciones adelantadas en un ciclo y los resultados logrados, fruto del ejercicio, son el preludio a un siguiente ciclo de investigación. Los sucesivos ciclos van gestando una ruta de transformación de conocimiento y posible cualificación de la práctica. La cantidad de ciclos está determinada por las limitaciones de profundidad y tiempo que impone la realización de un trabajo de grado. La experiencia nos mostró que en dos años se logran hacer dos o tres ciclos, a lo más. En la propuesta que hacemos, cada ciclo se compone de cinco fases, cuya articulación apunta a la identificación de evidencias del conocimiento didáctico-matemático en un momento dado del proceso de formación (que denominamos "estados de conocimiento") y la identificación de puntos débiles que requieren nuevos ciclos de investigación acción. La Figura 14 ilustra las fases sugeridas para cada ciclo de investigación-acción, indicando ejemplos de planes de acción.

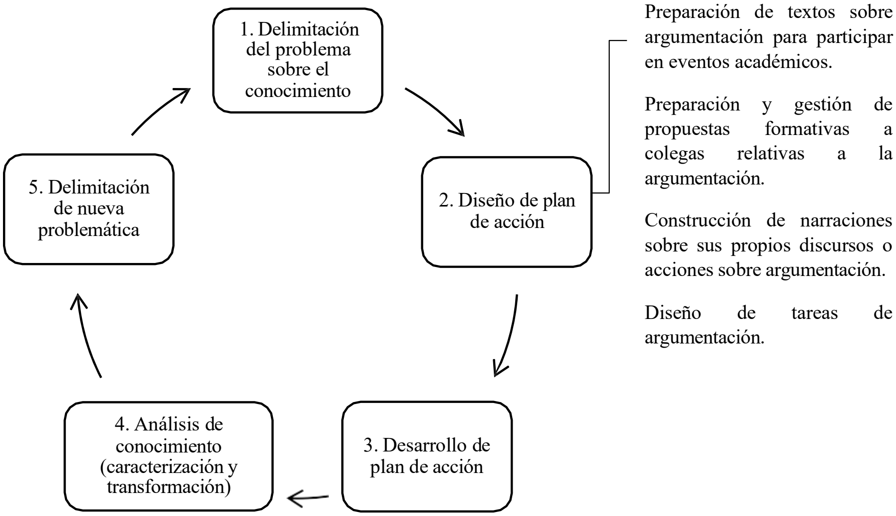

Figura 13. Ejemplo de ciclo de investigación-acción
Fuente: elaborada por los autores

La fase cuatro, debe conducir a: la caracterización del conocimiento didáctico matemático en tal ciclo, la comparación del conocimiento entre ciclos o a lo largo de un ciclo (en busca de transformaciones) y la identificación de debilidades, necesidades o vacíos en el conocimiento que deberían intentar solventarse en el siguiente ciclo. En la propuesta, sugerimos usar como fuente para obtener los datos a analizar, textos narrativos elaborados por los estudiantes, con base en la información registrada en cada ciclo, o matrices en donde se van registrando afirmaciones sobre el conocimiento, que se van organizando según las fechas y los escenarios en donde se producen. En estos, los estudiantes dan cuenta del plan de acción y de aquellos aspectos en los que creen que han avanzado en su conocimiento sobre el aspecto que se estudia. Algunas acciones que sugerimos para el proceso analítico son las siguientes:

- Selección de fragmentos de información en donde se aprecie información relevante para el análisis.
- Codificación de los fragmentos de acuerdo con las dimensiones y facetas del modelo CDM.
- Análisis del conjunto de códigos empleados para identificar en qué faceta o facetas se centra el conocimiento.

- Asignación de descriptores a los fragmentos para establecer matices diferenciadores de la información contenida en dichos códigos, para cada faceta. Estos descriptores pueden ser obtenidos inductivamente, mediante el examen de los fragmentos, o a partir de la revisión de literatura. La Tabla 6 muestra un ejemplo de categorías surgida en la implementación de a cohorte 2020.

Tabla 6. *Categorías sobre tipo de conocimiento*

Categorías Teóricas	Indicadores
Epistémica	• Definición de argumentación • Definición de términos afines a argumentación (justificación, conjeturación, demostración) • Alusión a tipos de argumentos o aproximación a definición de estos • Alusión a elementos que conforman un argumento o aproximación a definición de estos
Cognitiva	• Formas de aprender a argumentar • Errores, dificultades u obstáculos de los estudiantes relacionados con la argumentación
Afectiva	• Motivación o expectativas de aprendizaje de los estudiantes con respecto a la argumentación
Interaccional	• Aspectos metodológicos de la clase que favorecen la argumentación • Interacciones que favorecen la argumentación
Mediacional	• Recursos que favorecen la argumentación
Ecológica	• Relaciones entre el currículo y la argumentación

Fuente: elaborada por los autores

Comparación de fragmentos que correspondan a una misma faceta y descriptor para establecer posibles cambios en el conocimiento en un mismo ciclo o entre ciclos. La Tabla 7 muestra ejemplos de categorías para indicar cambios.

Tabla 7. *Categorías y subcategorías de transformación de conocimiento*

Categoría de transformación	Subcategoría	Indicador
Evolución de la conceptualización	Amplitud	Ampliación del significado de un término involucrando otros elementos

		diferentes a los explicitados anteriormente.
	Profundidad	Cambio en el significado de un término involucrando una caracterización detallada de un término al cual antes se aludía de manera escueta.
	Resignificación	Cambio radical en el significado que previamente se había dado a un término.
Vínculos entre términos	Sinonimia	Igualdad de significado entre términos.
	Contenencia	Identificación de un término como caso particular de otro.
	Intersección	Reconocimiento de aspectos comunes entre términos.
	Consecuencia	Identificación de dependencia entre dos términos.
	Diferenciación	Reconocimiento de aspectos diferenciales entre términos.
Asimilación	Repetición	Conocimiento referencial aislado. Parafraseo de conocimiento proveniente de alguna fuente de autoridad.
	Conexiones	Conocimiento referencial de más de una fuente. Establecimiento de vínculos entre diversas fuentes de autoridad.
	Apropiación	Expresión de ideas propias soportadas en ideas de otros.

Fuente: elaborada por los autores

COMENTARIOS FINALES

En este artículo de innovación hemos descrito algunos productos de nuestro proceso investigativo, relativo al diseño curricular sobre aspectos relacionados con la argumentación matemática que hemos involucrado en programas de formación (inicial y continuada) de profesores de matemáticas. En ese marco, queremos resaltar que dicho proceso nos obligó a profundizar nuestra conceptualización sobre los asuntos que nos interesaban (p. ej., argumento, argumentación, tipos de argumentos, componentes de un argumento). Este escenario nos hizo aún más conscientes de la variedad de posturas que existen; en consecuencia, nos hizo ganar más sensibilidad sobre:
(i) la complejidad que implica un tratamiento profesional al respecto, (ii) la necesidad de construir unas definiciones con las cuales nos sintiéramos

cómodos para poderlas hacer accesibles a los estudiantes en los procesos formativos y (iii) fundamentos para precisar rasgos que podrían tener los espacios de formación y enunciados de tareas específicas para promover aprendizaje sobre argumentación. Desde esta perspectiva, consideramos que los aportes más importantes de esta comunicación se concentran en dos asuntos:

En relación con la idea expresada en el numeral (ii), nuestra propuesta pretende hacer explícitas conceptualizaciones de términos relativos al objeto argumento que muchas veces son imprecisas o no expresadas en documentos que pretenden abordar aspectos relacionados con estos [5]. En ese marco, proponemos una elaboración que se enmarca en una perspectiva estructuralista, discusiva y social que busca ser operativa en procesos de enseñanza y aprendizaje: discursiva, porque nos interesa hacer hincapié en que un argumento es una expresión oral o escrita, "observable" por el auditorio (para nuestro caso, profesor y estudiantes), que pueda ser seguida (o evaluable) a lo largo de una interacción; social, porque estamos convencidos que estos discursos se producen en el marco de una interacción regulada por ciertas normas (de comunicación, de aceptabilidad, de inferencia, etc.) determinadas por el grupo social en el que se argumenta y que tiene por objeto justificar o sustentar la veracidad de ideas o la aceptabilidad de posturas (de esta forma nos alejamos de posturas cognitivistas que consideran la argumentación como un tipo de razonamiento de carácter más bien mental); estructuralista porque nos interesa destacar los elementos que conforman un argumento y cómo estos se relacionan para producir inferencias y sustentar aserciones (como procuramos ilustrar, posibilita, por ejemplo, maneras para describir diferentes tipos de argumentaciones -inductivas, abductivas y deductivas-).

Con respecto a lo dicho en el numeral (iii), consideramos oportuno resaltar cómo nuestro proceso investigativo, más precisamente la reflexión que este nos has suscitado en torno a la complejidad del tratamiento de asuntos relativos al objeto argumento, nos ha posibilitado hacer propuestas educativas concretas para diversos niveles de la formación de profesores de matemáticas en torno a este objeto y constructos relacionados; con ello, hacer un aporte que permita ir llenando el vacío indicado por varios autores sobre la necesidad de hacer propuestas que promueva la cualificación del conocimiento relativo a estos aspectos [2,6,9].

Esperamos, a través de esta comunicación, llamar la atención de otros formadores sobre la necesidad de construir continua y colectivamente un conocimiento pertinente para la enseñanza sobre los objetos que quieren poner al alcance de sus estudiantes, pese a tener una experiencia acumulada como educadores e investigadores. Así mismo, invitamos a colegas a que reaccionen a nuestras propuestas (de conceptualización de argumento y términos relacionados, por un lado; y de los lineamientos generales para los programas de formación, por otro); confiamos en la construcción colectiva como una manera pertinente para mejorarlas.

Agradecimientos

Agradecemos el apoyo del Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional por el apoyo y financiamiento de los proyectos de investigación que suscitaron este artículo: DMA-587-22 y DMA-615-23.

Referencias

1. Mariotti M. Proof and Proving in Mathematics Education. En: Gutiérrez A, Boero P, editores Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers; 2006. pp. 173–204. https://doi.org/10.1163/9789087901127_008
2. Boero P, Douek N, Morselli F, Pedemonte B. Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En: Pinto MMF, Kawasaky TF, editores. Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education; 2010; Belo Horizonte, Brazil: PME. pp. 179–204.
3. Durand-Guerrier V, Boero P, Douek N, Epp S, Tanguay D. Argumentation and Proof in the Mathematics Classroom. En: Hanna G, de Villiers M, editores. Proof and Proving in Mathematics Education. New York: Springer; 2012. pp. 349–368. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_15
4. Hanna G, de Villiers M. Proof and Proving in Mathematics Education New York: Springer; 2012. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6
5. Reid D, Knipping C. Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers; 2010.
6. Stylianides A, Bieda K, Morselli F. Proof and Argumentation in Mathematics Education Research. En: Guitérrez A, Leder G, Boero P, editores. The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Rotterdam: Sense Publishers; 2016. pp. 315–352. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_9

7. McNeill KL, Knight AM. Teachers' pedagogical content knowledge of scientific argumentation: The impact of professional development on k-12 teachers. Science Education. 2013; 97(6): 936–972. https://doi.org/10.1002/sce.21081
8. Baker M. Argumentative interactions and the social construction of knowledge. En: Mirza NM, Perret-Clermont AN, editores. Argumentation and education: Theoretical foundations and practices. Dordrecht: Springer; 2009. pp. 127–144. https://doi.org/10.1007/978-0-387-98125-3_5
9. Stylianides A, Ball D. Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. Journal of Mathematics Teacher Education. 2008; 11(4): 307–332. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9077-9
10. Krummheuer G. The ethnography of argumentation. En: Cobb P, Bauersfeld H, editores. The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates; 1995. pp. 229–269.
11. Yackel E, Cobb P. Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education. 1996; 27(4): 458–477. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.27.4.0458
12. Duval R. Lettre de la Preuve. [Online]; 1999 [Traducido por Patricio Herbst]. Disponible en: http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html
13. Perelman C, Olbrechts-Tyteca L. Tratado de la argumentación. La nueva retórica Madrid: Editorial Gredos; 1989.
14. Toulmin S. Los usos de la argumentación Barcelona: Ediciones Península; 2007.
15. Anscombre JC, Ducrot O. La argumentación en la lengua Madrid: Gredos; 1994.
16. van Eemeren FH, Grootendorst RA. Systematic Theory of Argumentation: The pragma-dialectical approach. Nueva York: Cambridge University Press; 2004.
17. Ledezma C, Sol T, Sala-Sebastià G, Font V. Knowledge and beliefs on mathematical modelling inferred in the argumentation of a prospective teacher when reflecting on the incorporation of this process in his lessons. Mathematics. 2022; 10: 3339. https://doi.org/10.3390/math10183339
18. Reuter F. Explorative mathematical argumentation: a theoretical framework for identifying and analysing argumentation processes in early mathematics learning. Educational Studies in Mathematics. 2023; 112: 415–435. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10199-5

19. Pedemonte B. How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematics. 2007; 66: 23–41. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9057-x
20. Camargo L, Samper C, Perry P, Molina O, Echeverry A. Use of dragging as organizer for conjecture validation. En: Tzekaki M, Kaldrimidou M, Sakonidis H, editores. Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2. Thessaloniki, Greece: PME; 2009. pp. 257–264.
21. Molina O, Samper C. Tipos de problemas que provocan la generación de argumentos inductivos, abductivos y deductivos. Bolema: Boletim de Educação Matemática. 2019; 32(62). https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a06
22. Molina O, Pino-Fan L, Font V. Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. Enseñanza de las Ciencias. 2019; 37(1): 93–116. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484
23. Molina O. Sistema de normas que influyen en procesos de argumentación: un curso de geometría del espacio como escenario de investigación [Tesis Doctoral] Osorno: Universidad de Los Lagos; 2019.
24. Arzarello F, Olivero F, Paola D, Robutti O. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. ZDM. 2002; 34(3): 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708
25. Arzarello F, Bartolini-Bussi M, Leung A, Mariotti M, Stevenson I. Experimental Approaches to Theoretical Thinking: Artefacts and Proofs. En: Hanna G, de Villiers M, editores. Proof and Proving in Mathematics Education.: Springer; 2012. pp. 97–146. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_5
26. Baccaglini-Frank A, Mariotti M. Generating Conjectures in Dynamic Geometry: The Maintaining Dragging Model. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 2010; 15: 225–253. https://doi.org/10.1007/s10758-010-9169-3
27. Pino-Fan L, Godino JD. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Paradigma. 2015; 36(1): 87–109.
28. Carr W. Una teoría para la educación. Hacia una investigación crítica: Morata; 2002.

Cómo citar el artículo

Molina, O., Camargo, L., Vargas, C., Samper, C., & Perry, P. (2024). Una propuesta para la formación de profesores de matemáticas: el caso de la argumentación matemática. *Revista de Investigación en Matemática y su Enseñanza*, *1*(1), 151-185. https://doi.org/10.32735/S2810-71872024000133356